UNIVERZITET U BEOGRADU – ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Aleksandra Krstić

Sanja Vujnović

Željko Đurović

ZBIRKA ZADATAKA IZ SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Akademska misao,
Beograd, 2022. godine

Aleksandra Krstić, Sanja Vujnović, Željko Đurović

ZBIRKA ZADATAKA
IZ SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Recenzenti
Dr Aleksandar Rakić
Dr Goran Kvaščev

Odlukom Nastavno-naučnog veća Elektrotehničkog fakulteta ova knjiga je odobrena kao nastavni materijal – udžbenik na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

Izdavači
Akademska misao, Beograd
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Štampa
Planeta print, Beograd

Tiraž
425 primeraka

ISBN 978-86-7466-944-0

Mesto i godina izdanja: Beograd, 2022.

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige – u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez prethodne izričite saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

PREDGOVOR

Zbirka zadataka iz sistema automatskog upravljanja je zamišljena kao pomoćni udžbenik za studente treće godine Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, koji se sa elementima analize i sinteze sistema sreću kroz nekoliko srodnih predmeta, a koji se na različitim odsecima zovu Sistemi automatskog upravljanja ili Osnovi sistema upravljanja. Polazi se od pretpostavke da su studenti već ovladali osnovnim znanjima iz oblasti teorije signala i sistema. Tu se u prvom redu misli na konvoluciju signala, osobine kontinualnih i diskretnih sistema, kao i na transformacione alate koji se uobičajeno koriste u ovim oblastima kao što su Furijeova, Laplasova i zed transformacija. Međutim, pored osnovne, studentske ciljne grupe, ovaj materijal bi mogao da bude zanimljivo i korisno štivo i za svršene studente elektrotehnike, ali i mašinstva, koji se u svom svakodnevnom radu sreću sa sistemima upravljanja, kao i potrebom da se ti sistemi održavaju i optimizuju.

Redosled pojedinih poglavlja je uglavnom pratio dinamiku izlaganja problema u klasičnim kursevima analize i sinteze sistema. Neke od tema su svojom kompleksnošću prevazišle okvire tih klasičnih kurseva. Međutim, autori su smatrali da je dobro da postoji ovakav, jedinstveni materijal koji počev od elementarnih tehnika za analizu sistema, preko različitih deskripcija sistema u ulazno/izlaznoj reprezentaciji ili prostoru stanja, različitih okvira u kojima se analiza sistema ili projektovanje kompenzatora može vršiti, nude i noviji, kompleksni koncepti nekonvencionalnih regulatora.

Autori su se potrudili da zbirka zadataka bude jednako korisna i u procesu učenja i savladavanja osnovnih znanja iz oblasti sistema upravljanja, ali i da sadrži dovoljan broj rešenih reprezentativnih problema koji će omogućiti studentima da kvalitetno spreme ispit. Ponuđena rešenja su dovoljno detaljna kako ne bi ostavljala nedoumicu kako se do kog rezultata stiže, gde god je postojalo više različitih postupaka na njih je ukazano, a na pojedinim mestima su dati i primeri za vežbanje, samo sa konačnim rezultatom.

Prvo poglavlje je zamišljeno kao uvod u teoriju sistema. Počinje sa tehnikama formiranja funkcija prenosa iz diferencijalnih ili diferencnih jednačina, razmatra slučaj sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom ali i multivarijabilnih sistema. Dalje, dati su primeri praktičnih sistema u zatvorenoj sprezi, kao što su pozicioni, brzinski, temperaturni i sistemi protoka fluida, i pokazano je kako se njihova analiza može vršiti u vremenskom domenu, a pomoću Laplasove ili zed transformacije. Na kraju, što je vrlo značajno, ovo poglavlje studentima demonstrira i primenu Mejsonovog pravila za izračunavanja funkcije prenosa ili matrice funkcija prenosa.

Sledeće, drugo poglavlje je posvećeno karakterizaciji sistema u vremenskom, frekvencijskom i kompleksnom domenu. Kroz ovo poglavlje je uvedena i mera kvaliteta ponašanja sistema, kao i veličina koje se u tu svrhu koriste. Od velikog značaja za bilo kog inženjera elektrotehnike koji se u svom profesionalnom radu bavi projektovanjem i optimizacijom dinamičkih sistema, je da vlada pojmovima kao što su vreme uspona, preskok, vreme smirenja, dominantna vremenska konstanta, propusni opseg ili faktor prigušenja. Kroz veliki broj primera su ilustrovani postupci za sračunavanje ovih parametara, ali je istovremeno ukazivano na njihovu fizičku povezanost.

Treće poglavlje je posvećeno tehnikama diskretizacije kontinualnih signala i sistema. Uvedene su teorijske transformacije kao što su tehnika impulsne ili step invarijantnosti, ali i različite numeričke metode. Pokazano je da je primenjivost ovih tehnika raznolika, počev od konzervacije stabilnosti, numeričke složenosti i kvaliteta aproksimacije kontinualnog signala diskretnim.

Četvrto poglavlje je posvećeno tehnikama u prostoru stanja. Uvedene su metode za formiranje kanoničnih formi, kao i prelazak sa ulazno/izlaznih reprezentacija u reprezentacije pomoću vektora stanja. Uvedene su osobine kontrolabilnosti i opservabilnosti stanja i demonstrirani su testovi za njihovo ispitivanje. Uvedene su povratne sprege, kako po stanjima, tako i po izlazima i pokazano je kako se može izvršiti podešavanje spektra polova ovim tehnikama. Na kraju poglavlja je uveden pojam opservera stanja i pokazani su svi elementi njegovog projektovanja.

Stabilnost dinamičkih sistema je obrađena u petom poglavlju. Osim što je na odgovarajućim mestima objašnjen koncept stabilnosti, uveden je pojam stabilnosti ravnotežnih stanja, a onda i algebarski kao i grafo-analitički testovi za ispitivanje stabilnosti linearnih sistema. Ravnopravno je tretirana stabilnost kontinualnih kao i diskretnih sistema.

Šesto i sedmo poglavlje su posvećeni tehnikama analize sistema kao i projektovanju kompenzatora u frekvencijskom domenu i metodom geometrijskog mesta korena. Pokazano je kako se, u zavisnosti od prirode procesa, ali i zavisno od rezultata koji se očekuje, ponašanje sistema može jednako kvalitetno opisati u frekvencijskom i u kompleksnom domenu. Na nekoliko ilustrativnih primera su pokazane tehnike projektovanja integro-diferencijalnih kompenzatora u frekvencijskom i kompleksnom domenu.

Poslednje, osmo poglavlje je posvećeno projektovanju kako konvencionalnih, tako i nekonvencionalnih zakona upravljanja. Dužna pažnja je posvećena najčešće korišćenim PID regulatorima i iskorišćeno je više različitih procedura za podešavanje njegovih parametara, kako bi čitaoci stekli uvid u postojanje čitavih familija različitih tehnika

podešavanja. Osim toga, kroz nekoliko primera su ilustrovani postupci projektovanja Dalinovog regulatora, regulatora sa minimalnim vremenom smirenja, LQ regulatora, LQ regulatora sa praćenjem reference, regulatora minimalne varijanse kao i tehnike podešavanja spektra polova sistema zadatih u formi funkcije prenosa.

Autori su se trudili da nađu meru u tome da zbirka zadataka ne bude udžbenik, ali da istovremeno, gde god je to neophodno, naglasi teorijski rezultat koji direktno vodi ka nekom rešenju postavljenih zadataka. Takođe, autori su nastojali da postavljeni i rešeni zadaci budu originalni, inovativni i reprezentativni u smislu osvetljavanja pojedinih oblasti teorije analize i sinteze sistema upravljanja. Pri tome, neki fundamentalni koncepti, kao što su pozicioni ili brzinski servomehanizmi su morali biti prikazani u standarnoj formi kakva se može i mora sresti i u drugoj udžbeničkoj literaturi [14, 22]. Gde god je postojala potreba za nekim dodatnim teorijskim objašnjenjem u cilju obrazlaganja primenjenih algoritama za rešavanje zadatih problema, argumentacija se uglavnom oslanjala na sadržaj navedene referentne literature [1, 3, 5, 8, 13, 15, 21, 31, 32].

Bez obzira na uloženi trud, autori ovog materijala su svesni da su izvesne greške, što slovne, što numeričke ili stilske, sigurno ostale u tekstu. Stoga su zahvalni svim čitaocima koji budu ukazali na uočene nedostatke ili poslali autorima svoje komentare, kako bi sledeća izdanja, a nadamo se da će ih biti, bila popravljena i kvalitetnija.

Na kraju, autori žele da se zahvale kolegama na Katedri za signale i sisteme Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, koji su svojim sugestijama, pitanjima, ispravkama, na posredan ili neposredan način dali svoj veliki doprinos da ovaj materijal izgleda u formi kakva je pred Vama. Konačno, autori duguju veliku zahvalnost recenzentima dr Aleksandru Rakiću, profesoru i dr Goranu Kvaščevu, profesoru, na vremenu koje su izdvojili da rukopis pažljivo pročitaju, ukažu na uočene nedostatke i daju vrlo korisne sugestije.

U Beogradu,

avgusta 2022. Autori

SADRŽAJ

1. Funkcije prenosa sistema automatskog upravljanja, strukturni blok dijagrami i elementi modeliranja procesa 1

2. Karakterizacija sistema u vremenskom, frekvencijskom i kompleksnom domenu 41

3. Diskretizacija i diskretni modeli 83

4. Analiza i sinteza sistema u prostoru stanja 119

5. Stabilnost dinamičkih sistema 213

6. Analiza i sinteza sistema u frekvencijskom domenu 247

7. Analiza i sinteza sistema u kompleksnom domenu: metod geometrijskog mesta korena.....307

8. Konvencionalni i nekonvencionalni zakoni upravljanja.....345

1. FUNKCIJE PRENOSA SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA, STRUKTURNI BLOK DIJAGRAMI I ELEMENTI MODELIRANJA PROCESA

ZADATAK 1.1.

Sledeći kontinualni sistemi su opisani diferencijalnim jednačinama. Podrazumeva se da je simbolom $u(t)$ označen ulaz, a simbolom $y(t)$ izlaz iz sistema. Predstaviti ove sisteme u ulazno/izlaznoj reprezentaciji, što podrazumeva funkciju prenosa ako je sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom ili matricom funkcija prenosa odgovarajućih dimenzija, ako ima više ulaza ili izlaza:

a) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 12y(t) = 3\ddot{u}(t) - 5\dot{u}(t) + 2u(t);$

b) $\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\dot{u}_1(t) + 3u_1(t) - u_2(t);$

c) $\ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + 2y_1(t) - y_2(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$; $y_1(t) + \ddot{y}_2(t) + 4y_2(t) = \dot{u}(t) - u(t);$

d) $\ddot{y}_1(t) + \dot{y}_1(t) + y_1(t) + \dot{y}_2(t) - y_2(t) = \dot{u}_1(t) + u_1(t) - u_2(t);$

$y_1(t) + \ddot{y}_2(t) + 3y_2(t) = u_1(t) + u_2(t);$

Rešenje:

a) Polazeći od toga kako se definiše funkcija prenosa sistema, da bismo rešili postavljeni zadatak potrebno je da na zadate diferencijalne jednačine primenimo Laplasovu transformaciju uz pretpostavku da su svi početni uslovi jednaki nuli. Sistem zadat pod a) je sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom, takozvani SISO (eng. *Single Input Single Output*) sistem, i funkciju prenosa ćemo direktno dobiti formiranjem količnika Laplasovih likova signala na izlazu i ulazu. Na ovom mestu podsetimo čitaoce da je za potrebe analize sistema i ulazno/izlazne reprezentacije sistema u teoriji upravljanja, uobičajeno korišćenje jednostrane ili takozvane unilateralne Laplasove transformacije koja glasi

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt,$$

posebno vodeći računa da kompleksna promenljiva *s* može uzeti vrednost samo iz oblasti kompleksne ravni koja se uobičajeno označava kao ROC (eng. *Region Of*

Convergency). To je oblast za koju navedeni integral ima konačnu vrednost. Za tako definisanu unilateralnu Laplasovu transformaciju važi osobina:

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$
$$= s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k x^{(n-1-k)}(0).$$

Shodno tome, primenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu kojom je zadat sistem pod a) dobijamo algebarsku relaciju:

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) + 3\big(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\big) - 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 12Y(s)$$
$$= 3\big(s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0)\big) - 5\big(sU(s) - u(0)\big) + 2U(s).$$

Usvajajući da su svi početni uslovi jednaki nuli, lako dolazimo do količnika Laplasovih likova izlaznog i ulaznog signala što predstavlja funkciju prenosa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^2 - 5s + 2}{s^3 + 3s^2 - 4s + 12}.$$

Kaže se da je ovo sistem trećeg reda jer je polinom u imeniocu funkcije prenosa, koji se uobičajeno zove karakteristični polinom, trećeg stepena.

b) Sistem zadat diferencijalnim jednačinama pod b) ima dva ulaza i jedan izlaz i stoga pripada grupi sistema koji se u literaturi označavaju kao MISO (eng. *Multiple Input Single Output*) sistemi. Ponovo primenom Laplasove transformacije na zadatu diferencijalnu jednačinu i usvajanjem nultih početnih uslova dobijamo algebarsku relaciju:

$$s^2Y(s) - 6sY(s) + 4Y(s) = 2sU_1(s) + 3U_1(s) - U_2(s).$$

Odgovarajućim grupisanjem članova uz pojedine ulaze i izlaze i deljenjem cele relacije polinomom koji stoji uz izlazni signal, poslednja relacija postaje

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{s^2 - 6s + 4}U_1(s) - \frac{1}{s^2 - 6s + 4}U_2(s),$$

što nam omogućava matričnu predstavu:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s + 3}{s^2 - 6s + 4} & -\frac{1}{s^2 - 6s + 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$