KVALITATIVNA ANALIZA LINIJSKIH NOSAČA

dr Marija Nefovska-Danilović

dr Vitomir Racić

Beograd, 2026.

dr Marija Nefovska-Danilović, dr Vitomir Racić

KVALITATIVNA ANALIZA LINIJSKIH NOSAČA

Izdavač
Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

Za izdavača
Prof. dr Branislav Bajat, dekan

Recenzenti
Prof. dr Mira Petronijević
Prof. dr Stana Živanović
V. prof. dr Miroslav Marjanović

Štampa
Planeta print, Beograd

Tiraž
300 primeraka

ISBN-978-86-7518-255-9

PREDGOVOR

Do početka novog milenijuma, građevinskoj industriji su uglavnom bili potrebni inženjeri koji su znali da sprovedu kompletan statički proračun relativno složenih nosača ručno, odnosno bez upotrebe računara. Studije građevinarstva su zato pokrivale širok spektar predmeta iz oblasti inženjerskih nauka, uključujući napredne kurseve matematike i klasične metode statike konstrukcija, kao što su metoda sila ili približna metoda deformacije.

Sa pojavom personalnih računara i programa za statičku analizu konstrukcija rad građevinskih inženjera se postepeno automatizovao, potiskujući upotrebu metoda klasične statike konstrukcija. Savremeni nastavni planovi i programi na građevinskim fakultetima i dalje obuhvataju ove metode jer imaju izuzetan edukativni značaj. Pri tome je primetan i globalni trend da se fokus nastave sa kvantitativnih metoda preusmeri na fundamentalno razumevanje ponašanja građevinskih konstrukcija.

Svakodnevna primena računarskih programa zasnovanih na metodi konačnih elemenata u statičkom proračunu dovela je do povećane potrebe za poznavanjem *kvalitativne analize*. Ona građevinskim inženjerima omogućava da i bez proračuna predvide očekivani odgovor nosača i relativno brzo verifikuju rezultate numeričke analize, uoče potencijalne probleme u numeričkom modelu, predvide ponašanje konstrukcije tokom izgradnje i sagledaju uticaj različitih graničnih uslova. Uloga građevinskih inženjera u projektovanju konstrukcija će se verovatno dodatno menjati u budućnosti, usled sve intenzivnije upotrebe veštačke inteligencije i tehnika mašinskog učenja. Takođe, parametarsko modeliranje je sve popularnije i omogućava projektantima da primenom računara menjaju oblik konstrukcije i odmah uoče promene u statičkom odgovoru i dimenzijama

konstruktivnih elemenata. Zbog svega navedenog, kvalitativna analiza postaje deo neophodnog fundamentalnog znanja savremenog građevinskog inženjera. Ona ne predstavlja alternativu kvantitativnoj analizi, već je njen logički i neophodan pratilac. Poznavanje kvalitativne analize doprinosi razvoju inženjerske intuicije i pruža mogućnost boljeg razumevanja konstrukcije, a ne samo njenog proračuna.

Materija prikazana u ovoj knjizi obrađuje oblast kvalitativne analize ravnih linijskih nosača. Od školske 2021/22. godine ova oblast se predaje u okviru predmeta *Statika konstrukcija 2* na trećoj godini (šesti semestar) osnovnih akademskih studija Građevinarstva na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Osnovna namera autora bila je da formulišu jasnu metodologiju kvalitativne analize, prilagođenu vrsti nosača i stepenu njihove statičke neodređenosti, kao i da sistematizuju postojeću literaturu iz ove oblasti, koja je inače veoma ograničenog obima. Knjiga je koncipirana kao dopuna gradivu iz statičke analize linijskih nosača koje se već decenijama predaje u okviru teorije konstrukcija na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Nastanak knjige je inspirisala publikacija *Understanding structural analysis* autora Dejvida Brona (David Brohn), koja je neizostavna i jedina štampana literatura za pripremu građevinskih inženjera za polaganje ispita za sticanje licence Društva građevinskih konstruktera Velike Britanije (IStructE). Ovo prestižno udruženje je pre više od deset godina prepoznalo kvalitativnu analizu kao jednu od ključnih veština u savremenom projektovanju građevinskih konstrukcija.

Za uspešno savladavanje materije izložene u ovoj knjizi, od čitaoca se očekuje da već poseduje znanje iz metoda klasične statike konstrukcija, stečeno kroz predmete *Tehnička mehanika 1* i *Statika konstrukcija 1* na osnovnim akademskim studijama Građevinarstva, neophodno za crtanje dijagrama sila u presecima linijskih nosača. Međutim, knjiga počinje osnovnim konceptima kvalitativne analize i postepeno uvodi složenije primere, tako da čitaoci mogu da razviju veštine i prošire znanje u ovoj oblasti čak i bez prethodnog iskustva u kvalitativnoj analizi.

Iako je knjiga prvenstveno namenjena studentima koji pohađaju kurs *Statika konstrukcija 2* na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, autori se nadaju da će biti korisna i studentima drugih građevinskih fakulteta, kao i

inženjerima u praksi koji žele da osveže ili prodube svoje znanje iz oblasti teorije konstrukcija.

Autori se posebno zahvaljuju recenzentima knjige: prof. dr Miri Petronijević, prof. dr Stani Živanović i v. prof. dr Miroslavu Marjanoviću na temeljnoj recenziji rukopisa i dragocenim sugestijama koje su značajno doprinele kvalitetu ove knjige. Zahvaljujemo se i asist. Mariji Milojević na pomoći i savetima tokom tehničke pripreme knjige.

U Beogradu, novembar 2025.

Autori

SADRŽAJ

PREDGOVOR 3

LISTA SIMBOLA 8

1 UVOD 9

2 REKAPITULACIJA OSNOVNIH JEDNAČINA STATIKE LINIJSKIH NOSAČA 13

2.1 USLOVI RAVNOTEŽE ELEMENTA ŠTAPA 13
2.2 VEZE IZMEĐU DEFORMACIJE I POMERANJA ELEMENTA ŠTAPA 18
2.3 VEZA IZMEĐU PROMENE KRIVINE I MOMENTA SAVIJANJA ŠTAPA 20
2.4 RAVNI LINIJSKI NOSAČI 26
2.5 SIMETRIČNI NOSAČI 28
2.6 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA 31

3 STATIČKI ODREĐENI PUNI NOSAČI 33

3.1 GREDNI NOSAČI SASTAVLJENI OD JEDNE KINEMATIČKI KRUTE PLOČE 36
3.2 NOSAČI SASTAVLJENI OD LANCA PLOČA 45
3.3 OKVIRNI NOSAČI 57
3.3.1 OKVIRNI NOSAČI SASTAVLJENI OD JEDNE KINEMATIČKI KRUTE PLOČE 57
3.3.2 OKVIRNI NOSAČI SASTAVLJENI OD DVE I VIŠE KINEMATIČKI KRUTIH PLOČA 62
3.4 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA 73
3.5 ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD 75

4 STATIČKI NEODREĐENI PUNI NOSAČI 77

4.1 KONTINUALNI NOSAČI 92
4.2 STATIČKI NEODREĐENI LANCI PLOČA 106
4.3 STATIČKI NEODREĐENI OKVIRNI NOSAČI 114
4.3.1 OKVIRNI NOSAČI SA NEPOMERLJIVIM ČVOROVIMA 117
4.3.2 OKVIRNI NOSAČI SA POMERLJIVIM ČVOROVIMA 130
4.4 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA 159
4.5 ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD 161

5 REŠETKASTI NOSAČI 165

5.1 STATIČKI ODREĐENI REŠETKASTI NOSAČI 166
5.2 STATIČKI NEODREĐENI REŠETKASTI NOSAČI 177
5.3 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA 183
5.4 ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD 184

LITERATURA 187

LISTA SIMBOLA

ε	dilatacija ose štapa
δ	dijagram pomeranja nosača
κ	promena krivine štapa
φ	ugao obrtanja poprečnog preseka štapa
α_t	koeficijent linearne temperaturne dilatacije
Δt	temperaturna razlika
c_o	pomeranje oslonca
c_u	obrtanje uklještenja
E	modul elastičnosti
F	površina poprečnog preseka štapa
h	visina poprečnog preseka štapa
I	moment inercije poprečnog preseka štapa
l	dužina štapa
M	moment savijanja
N	normalna sila
p_x, p_y	komponente linijskog opterećenja u x i y pravcu
T	transverzalna sila
$t°$	temperaturna promena u osi štapa
u, v	komponente pomeranja u x i y pravcu
x, y	ose Dekartovog koordinatnog sistema štapa

1 UVOD

Za većinu građevinskih inženjera, standardni pristup u analizi linijskih nosača u građevinskim konstrukcijama podrazumeva primenu analitičkih i numeričkih metoda. Ove metode spadaju u kvantitativne metode jer omogućavaju određivanje sila u presecima i deformacije na osnovu definisane geometrije nosača, graničnih uslova i spoljašnjeg opterećenja. Rezultati takve analize se prikazuju u vidu dijagrama sila u presecima i deformacije (pomeranja) i neizostavno sadrže njihove brojne vrednosti. U projektovanju oni služe kao osnova za dimenzionisanje elemenata konstrukcije u pogledu nosivosti i upotrebljivosti. Međutim, i pre, ali i posle same kvantitativne analize, od ključne je važnosti sprovesti *kvalitativnu* analizu. Cilj kvalitativne analize je da bez proračuna ukaže na očekivani odgovor nosača. Ona je neizostavna veština inženjera i oslanja se na razumevanje osnovnih principa teorije konstrukcija, stručno iskustvo i inženjersku intuiciju. Kvalitativna analiza podrazumeva sposobnost inženjera da sagleda uzajamne veze između zadatog opterećenja, reakcija oslonaca, raspodele sila u presecima i oblika deformacije po pravilu bez oslanjanja na kvantitativne metode, koje danas uglavnom uključuju upotrebu softvera zasnovanih na metodi konačnih elemenata. Iako savremeni računarski programi omogućavaju brzo i precizno rešavanje čak i najsloženijih matematičkih modela građevinskih konstrukcija, postavlja se ključno pitanje – kako se sa sigurnošću može utvrditi da su rezultati koje vidimo na ekranu pouzdani?

Kao dodatak numerički dobijenim rezultatima, kvalitativna analiza pomaže da se uoče eventualne greške u modeliranju konstrukcije, graničnih uslova i opterećenja, kao i pogrešnih pretpostavki i neadekvatnih oblika dobijenih dijagrama. Na taj način kvalitativna analiza ne samo da unapređuje inženjersku

intuiciju već je i nezaobilazan korak ka pouzdanoj primeni kvantitativnih metoda u praksi, što je presudno za donošenje ispravnih projektantskih odluka.

Ključni rezultati kvalitativne analize su *skice*, odnosno nacrtani pravci i smerovi reakcija oslonaca, oblici dijagrama sila u presecima i deformacija (pomeranja), uključujući njihovu međusobnu povezanost. Kvalitativna analiza je prvi i najvažniji korak u ranim fazama projektovanja. Ako se u početnim fazama napravi pogrešna procena raspodele uticaja, rezultati kasnijih detaljnijih analiza mogu biti potpuno pogrešni, bez obzira na njihovu numeričku preciznost.

Šematski prikaz osnovnih koraka u kvalitativnoj analizi dat je na Slici 1.1. U kvalitativnoj analizi ne postoji unapred definisana univerzalna procedura za dolazak do rešenja. Redosled koraka analize zavisi od vrste nosača, njegove statičke (odnosno deformacijske) neodređenosti i vrste opterećenja, pri čemu je neophodno slediti određena načela. Kod statički određenih nosača kvalitativna analiza po pravilu počinje određivanjem pravaca i smerova reakcija oslonaca. Nakon toga, skicira se dijagram momenata savijanja i na kraju dijagram pomeranja, odnosno deformisani oblik nosača. S druge strane, kvalitativna analiza statički neodređenih nosača je znatno složenija. Njen prvi korak zavisi od stepena statičke neodređenosti, kao i od toga da li se radi o nosaču sa pomerljivim ili nepomerljivim čvorovima. Na primer, kvalitativna analiza kontinualnih nosača po pravilu počinje crtanjem dijagrama pomeranja (deformacije), nakon čega se određuju smerovi reakcija oslonaca i crta dijagram momenata savijanja. Takođe, uočavanje osobina simetrije nosača može značajno olakšati postupak kvalitativne analize. Važno je naglasiti i da za dati nosač, granične uslove i opterećenje, postoji jednoznačno rešenje sila u presecima i deformacije nosača. Drugim rečima, to jednoznačno rešenje mora zadovoljiti osnovne jednačine linearne teorije štapa, kao i uslove ravnoteže i kompatibilnosti u čvorovima nosača.

Nakon uvodnog poglavlja, u Poglavlju 2 data je rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije štapa i ravnih linijskih nosača, gradiva koje je već izučavano na prethodnim kursevima statike konstrukcija. U Poglavlju 3 predstavljeni su osnovni principi kvalitativne analize statički određenih punih nosača. Prvo su analizirani jednostavniji statički sistemi, kao što je prosta greda ili greda sa prepustom, zatim gredni nosači sastavljeni od lanca ploča, a na kraju okvirni nosači. Poglavlje 4 posvećeno je kvalitativnoj analizi statički neodređenih