Dr Radojle Radetić

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I ELEKTROMAGNETIKE

– PODSETNIK ZA ELEKTROINŽENJERE –

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I ELEKTROMAGNETIKE

– PODSETNIK ZA ELEKTROINŽENJERE –

Autor

Dr Radojle Radetić, dipl. inž. el.

Recenzenti:

Profesor dr Dejan Jerkan, FTN, Novi Sad

Profesor dr Dejan Krstić, Fakultet zaštite na radu, Niš

Kompjuterska obrada teksta: Radojle Radetić

Izdaje i štampa: Agencija Eho, Niš, 2026.

Tiraž: 200

ISBN 978-86-80134-61-1

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

537.2/.3
537.8

РАДЕТИЋ, Радојле, 1957-
Osnove elektrotehnike i elektromagnetike : podsetnik za elektroinženjere / Radojle Radetić. - Niš : Agencija Eho, 2026 (Niš : Agencija Eho). - 205 str. : ilustr. ; 24 cm

Autorova slika. - Tiraž 200. - O autoru: str. 205. - Bibliografija: str. 203.

ISBN 978-86-80134-61-1

a) Електростатика b) Електрична струја v) Електромагнетизам

Važne napomene

1. Autor je nastojao da materija u ovoj knjizi bude izložena tačno i jasno. I pored velikih napora da se izbegnu greške, ne može se tvrditi da one ne postoje. Autor upozorava čitaoce na moguće greške i unapred se izvinjava zbog toga.
2. Praktičan rad sa strujom može biti opasan, i po život i zdravlje.
3. Autor zadržava sva prava eventualnih izmena, bez obaveze prethodnog obaveštenja.
4.

Uspomeni na roditelje
Vericu i Milorada

PREDGOVOR

Elektromagnetika i osnove elektrotehnike su temelj čitave elektrotehnike. Autor je poželeo da još jednom prođe kroz tu materiju i da je predstavi na svoj način. Postavljen je zadatak da to bude što kraće ali da se bar dotaknu sve relevantne oblasti.

Na osnove elektrotehnike treba gledati kao na vodiča koji nas vodi kroz hodnik velike zgrade koja se zove Elektrotehnika. U njoj je mnogo prostorija (oblasti) sa mnogo vrata. Vodič nam objašnjava šta se sve radi u toj zgradi, i pomalo nam otvori neka od njih da malo pogledamo šta je iza njih. Kada završimo taj obilazak (naučimo osnove elektrotehnike) možemo da ulazimo u prostorije te zgrade - pojedine oblasti i da se njima detaljno bavimo. Ovo su reči profesora Branka Popovića, po mome sećanju sa prvog časa osnova elektrotehnike 1976. godine na FTN u Novom Sadu.

Ideja autora je da se na jednom mestu nađu teme iz osnova elektrotehnike i elektromagnetike. Akcenat je stavljen na osnovama elektrotehnike, a elektromagnetika je predstavljena sa njenim osnovnim elementima. Tako zamišljena ova knjiga u sebi treba da objedini materiju koja se nekad izučavala na elektrotehničkim fakultetima tokom više semestara, a čija literatura obuhvata preko hiljadu stranica. Ova knjiga je to sažela u mnogo manji obim.

Elektromagnetika je fundamentalna nauka. Ona posmatra električno i magnetno polje lokalno, u tački, u odgovarajućoj sredini, prati zakonitosti njihovog prostornog i vremenskog menjanja i energetske odnose sa njima. Ona je fizika elektrotehnike. Osnova elektromagnetike su Maxwellove jednačine. One zahtevaju veoma složen matematički aparat koji se izučava na kasnijim godinama studija. Zbog toga se i elektromagnetika izučava na višim godinama studija.

Elektrotehnika je nauka koja se bavi rešavanjem praktičnih problema, proizvodnje, prenosa i pretvaranja električne energije, rad sa električnim signalima itd. To je veoma široka oblast, a *osnove elektrotehnike* su njen temelj. Iz praktičnih razloga ona radi sa naponima, strujama, elementima kola i energetskim odnosima u njima. Ove veličine se lako mere, a matematički aparat elektrotehnike relativno jednostavan i dostupan studentima nižih godina studija. U nešto jednostavnijoj formi ona se izučava i u srednjim školama.

Sa ovakvim odnosom osnova elektrotehnike i elektromagnetike bilo bi logično da se prvo proučava elektromagnetika i iz nje kao specijalni slučaj kasnije proučavaju osnove elektrotehnike. Međutim zbog nesklada sa procesom izučavanja matematike tokom studija, to nije moguće. Zato se osnove elektrotehnike izučavaju ranije, tako da se važeći fizički zakoni prihvataju kao činjenice ne ulazeći dublje u njihovo poreklo. To poreklo postaje jasno tek kasnije, kroz elektromagnetiku.

Prvenstvena namena ove knjige je da bude podsetnik inženjerima elektrotehnike koji vole svoju struku, a čija su znanja vremenom malo izbledela. Tako zamišljena ova knjiga je svojevrsna promocija elektrotehnike i elektromagnetike.

Od čitaoca se očekuje osnovno poznavanje vektorske algebre (sabiranje vektora, skalarni, vektorski i mešoviti proizvod itd.). Nešto viši nivo matematike je vektorska analiza i njeni osnovni elementi prikazani su u dodatku.

U savremenoj inženjerskoj praksi potrebna je informisanost i razumevanje pojava i procesa. Za detaljne proračune, u svim oblastima, postoje odgovarajući računarski softveri. Inženjeri treba da razumeju te pojave i procese kako bi znali da pravilno postave problem, a računari će odraditi fizički deo posla. Savremenim inženjerima treba ostaviti vremena i za druge oblasti neophodne u svom radu. Ova knjiga bi trebalo da bude jedan takav kompromis.

Radeći na ovoj knjizi autor je koristio dostupnu domaću i stranu literaturu iz ove oblasti. Iz nje je pokušao da izabere najinteresantnije delove; dobra objašnjenja, matematička izvođenja, lepe slike itd. Sva korišćena literatura je uredno evidentirana.

Autor se zahvaljuje svima koji su podržali i na druge načine doprineli nastanku i boljem kvalitetu ove knjige. Posebnu zahvalnost upućujem recenzentima.

Autor je nastojao da sva materija bude tačno i jasno izložena i unapred se izvinjava čitaocima ako se ipak potkrala i poneka greška.

U Boru, marta 2026. godine. Autor

SADRŽAJ

UVODNA RAZMATRANJA

Kratka istorija

Od svog postanka čovek je gledao munje iz oblaka, divio im se i bojao. U staroj Grčkoj su primetili da kada se protrlja komad ćilibara, privlači sitne komade slame. Hiljadama godina je poznato da neke rude privlače komade gvožđa i slično.

Te pojave bile interesantne, neobične i neobjašnjive, skoro magične. Bilo je potrebno da prođe mnogo godina da se ove pojave istraže i da se razume njihovo poreklo. Da bi se došlo do tog nivoa svesti bilo je potrebno da se prethodno razviju neke druge oblasti, u prvom redu mehanika i termodinamika. Kada su proučene pojave kao što su kretanje, sile, rad, energija itd. postalo je moguće proučavanje i ovih pojava. Prva ozbiljna istraživanja u ovoj oblasti se pojavljuju u osamnaestom i nastavljaju u devetnaestom veku. U početku na ove pojave se gledalo potpuno odvojeno i izučavane su nezavisno jedne od drugih. Kulon je izmerio silu između naelektrisanja. Ersted je uočio delovanje struje u provodniku na magnetnu iglu. Polako su se profilisale dve oblasti, elektrostatika i magnetizam. Eksperimentima Faradeja uspostavljana je njihova međusobna povezanost. U tome je veliki doprinos dao Maksvel objedinjavajući ove pojave u jednu nerazdvojnu celinu.

Sa današnjeg nivoa poznavanja elektrotehnike prihvaćen je logičan redosled izlaganja materije koji vodi ka povezanosti elektriciteta i magnetizma. Prvo se posmatra ponašanje naelektrisanja u mirovanju i pojave u vezi sa tim – elektrostatika. Posle toga posmatraju se naelektrisanja u kretanju. Tako se ulazi u novu oblast – električne struje i električna kola. Sledi posmatranje nestacionarnih pojava sa naelektrisanjima i magnetnim poljima. U nastavku se obrađuju i naizmenične struje i električna kola sa njima.

Elektromagnetika na ove pojave gleda lokalno (u tački). Ona posmatra polja i traži međusobne veze i energetske odnose između njih.

Takav redosled razmatranja će biti praćen i u ovoj knjizi.

Mikrofizika provodnika

Za razumevanje električnih pojava neophodno je osnovno poznavanje atomske strukture materije kako bi se prepoznalo njihovo poreklo. Ovde se radi o veoma velikom broju naelektrisanih čestica tako da i neki relativistički efekti koji normalno dolaze do izražaja tek pri velikim brzinama ovde postaju vidljivi i pri jako malim brzinama kretanja naelektrisanja. Dalje će u najkraćim crtama biti prikazani neki elementarni pojmovi i veličine mikrofizike provodnika.

U provodniku postoje pozitivna (protoni) i negativna naelektrisanja (elektroni). Struju u provodniku čine slobodni (valentni) elektroni, po jedan iz poslednje ljuske. Pod dejstvom električnog polja ovi elektroni mogu slobodno da se kreću unutar metala. Odlaskom elektrona iz ljuske atom postaje pozitivno naelektrisan. Pozitivna naelektrisanja su deo kristalne rešetke metala i ona su nepokretna.

Na primer, bakar ima ukupno 29 protona i prosečno oko 34,5 neutrona u jezgru. Elektronski omotač se sastoji od 29 elektrona raspoređenih u četiri ljuske. Poslednja ljuska ima samo jedan elektron i on je slabo vezan za atom. On lako napušta svoj atom i pod dejstvom električnog polja može da se kreće unutar metala. Može se očekivati da je iz svakog atoma provodnika slobodan po jedan elektron.

Broj elektrona po molu jednak Avogadrovom broju (N_A=6,02·10^{23} 1/mol).

Elementarno naelektrisanje (naelektrisanje elektrona) je e=–1,6 ·10^{19} C.

Naelektrisanje slobodnih elektrona po jednom molu iznosi $F=N_A\cdot e\approx$–96500C (Faradejeva konstanta).

Prečnik atoma bakra je reda veličine 10^{-10} m a jezgra oko 10^{-15} m. Ako se uzmu u obzir atomska masa bakra (63,5 g) i specifična težina (8,9 g/cm^3) može se doći do broja atoma po jedinici zapremine. Tako bakar sadrži oko 8,44·10^{28} atoma po metru kubnom i isto toliko slobodnih elektrona. Gustina naelektrisanja slobodnih elektrona je oko 1,35·10^{10} C/m^3 ili 13500 C/cm^3 ili 13,5 C/mm^3.

Razmak između jezgara atoma bakra je oko 2,55·10^{-10} m. Broj slobodnih elektrona u jednom sloju (na primer površinskom) je oko 1,53·10^{28} po m^2. Ovome odgovara površinska gustina slobodnih naelektrisanja od oko 2,45 C/m^2. Ovo je jako velika vrednost. U praksi se primenom najboljih izolatora u kondenzatorima postižu gustine naelektrisanja do oko 2 mC/m^2.

Broj elektrona po dužnom metru bakra je oko 3,92·10^9. Brzina kojom se kreće valentni elektron oko jezgra bakra je približno 1,41·10^6 m/s. Broj obilazaka elektrona oko atoma je oko 1,76·10^{15} u sekundi. Ovome odgovara kružna struja po jednom valentnom elektronu od oko 0,282 mA. Magnetni moment ovog elektrona je oko 1,44·10^{-24}Am^2.

Kada bi se magnetni momenti svih valentnih elektrona bakra orijentisali u istom smeru (u pravcu površine metala) linijska gustina struje bila bi oko 1,1·10^{6}A/m odnosno oko 1100 A/mm. Ova gustina struje jednaka je jačini magnetnog polja uz provodnik. Njoj bi odgovarala magnetna indukcija od oko 1,39T.

Masa elektrona je m_e=9,1·10^{-31} kg. U jednom molu masa slobodnih elektrona je oko 0,547 mg slobodnih elektrona.

Masa protona je 1836 puta veća od mase elektrona m_p=1,67·10^{-27} kg.

Za atom čija je atomska masa A stvarna masa je m_A=A/N_A=1,66·10^{-24}A (kg). Na primer za bakar je A=63,5 pa je stvarna masa atoma bakra m_A=1,05·10^{-22} kg.

Unutar atoma postoji veoma jako električno polje. Na primer, jačina električnog polja vodonikovog atoma na udaljenosti putanje elektrona od oko 1,25·10^{11} V/mm (125 MV/mm). U vazduhu se može postići maksimalna jačina polja od oko 30 kV/mm (300V na 0,01 mm – Pašenova kriva za p=1 bar). U praksi je ta granica još manja (ispod 3 kV/mm).

Dielektrici i vakuum

Struktura dielektrika je takođe veoma složena. Sa aspekta elektrotehnike njihovo najvažnije svojstvo je da nemaju slobodnih nosilaca elektriciteta – ne provode struju. Svojom polarnošću oni utiču na električno polje i to će biti detaljnije analizirano.

Ostaje još vakuum. On bi trebalo da bude prazan prostor takav da može da deponuje energiju u obliku električnog i magnetnog polja.

Spisak oznaka, veličine i merne jedinice

- U napon (V)
- E elektromotorna sila (V)
- V električni potencijal (V)
- I struja (A)
- P snaga (W)
- W energija (J)
- A mehanički rad (J)
- R električna otpornost (Ω)
- Z impedansa (Ω)
- C kapacitivnost (F)
- L induktivnost (H)
- $\vec{E}$ vektor jačine električnog polja (V/m)
- $\vec{J}$ vektor gustine struje (A/m^2)
- $\vec{D}$ vektor električnog pomeraja (C/m^2)
- $\vec{P}$ vektor električne polarizacije (C/m^2)
- σ specifična električna provodnost (S/m)
- $\vec{H}$ vektor jačine magnetnog polja (A/m)
- $\vec{B}$ vektor magnetne indukcije (T)
- $\vec{M}$ vektor magnetizacije (A/m)
- $\vec{A}$ vektorski magnetni potencijal (Tm)
- φ_m skalarni magnetni potencijal (A)
- q naelektrisanje (C)
- q' podužna gustina naelektrisanja (C/m)
- η površinska gustina naelektrisanja (C/m^2)
- ρ zapreminska gustina naelektrisanja (C/m^3)
- ε dielektrična propustljivost – permitivnost (F/m)
- ε_0 dielektrična propustljivost vakuuma (ε_0=8,85418·10^{-12} F/m)
- ε_r relativna dielektrična propustljivost sredine
- τ vremenska konstanta relaksacije (s)
- μ magnetna propustljivost – permeabilnost (H/m)
- μ_0 dielektrična permeabilnost vakuuma (μ_0=4π·10^{-7} H/m)
- μ_r relativna magnetna permeabilnost sredine
- c brzina talasa u posmatranoj sredini (m/s)
- c_0 brzina svetlosti u vakuumu (299792458 m/s)
- Γ Poitingov vektor (W/m^2)
- α konstanta slabljenja (prigušenja) (m^{-1})
- β fazna konstanta (m^{-1})
- γ talasna konstanta (m^{-1})
- Z_C talasna impedansa (Ω)

1. ELEKTROSTATIKA

Elektrostatika je oblast elektrotehnike u kojoj se posmatraju pojave u električnom polju koje se makroskopski ne menja u vremenu. Takvo električno polje naziva je elektrostatičko. Elektrostatičko polje karakteriše sila na naelektrisanje. Za kvantitativna ispitivanja ovo naelektrisanje treba da bude dovoljno malo da svojim prisustvom ne remeti polje u kome se nalazi. Ono se zove i *probno naelektrisanje*. Probno naelektrisanje može da miruje ili da se kreće.

Za dovođenje električnog polja u posmatrano stanje potreban je neki prelazni proces u kome se naelektrisanja dovode ili odvode. U elektrostatici taj deo se preskače i posmatra samo krajnje (stacionarno) stanje.

1.1. Naelektrisanje

Postoje dve vrste naelektrisanja koja su proizvoljno nazvana pozitivnim i negativnim. Jedinica mere količine elektriciteta je Kulon (C). Elementarno naelektrisanje predstavlja elektron sa negativnim naelektrisanjem, $e=-1{,}602\cdot 10^{-19}$ C. Proton ima istu količinu elektriciteta samo pozitivnu.

U normalnim uslovima tela su električno neutralna što znači da imaju istu količinu pozitivnog i negativnog elektriciteta. Kod dielektričnih materijala *trenjem* dolazi do razdvajanja naelektrisanja tako da na telu može da se pojavi višak pozitivnog ili negativnog naelektrisanja. Ta pojava se naziva *triboelektrični efekat*. Kod provodnika višak naelektrisanja se pojavljuje dovođenjem provodnika pod napon.

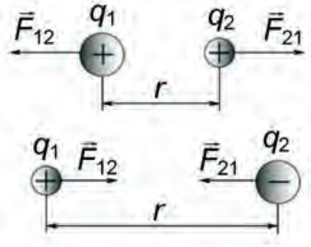
Za tela normalnih dimenzija količine elektriciteta su reda nC do μC. U prirodi (u oblacima) mogu da se pojave i znatno veće količine elektriciteta.

Raspodela elektriciteta na naelektrisanom telu može da bude; *podužna* - q' (C/m), *površinska* - η (C/m^2) i *zapreminska* - ρ (C/m^3).

1.2. Kulonov zakon

Savremena elektrostatika zasniva se na radovima Kulona koji (1785. g.) je kvantitativno proučavao silu između naelektrisanih tela (elektrostatičku silu). On je posmatrajući dva naelektrisana tela vrlo malih dimenzija (*tačkasta naelektrisanja*) došao do matematičkog izraza za silu koja se pojavljuje između njih.

Sila je vektorska veličina i pored intenziteta ima svoj pravac i smer. Takođe prema Njutnovom zakonu akcije i reakcije moraju da postoje dve sile jednakog intenziteta, istog pravca, ali suprotnih smerova.



Sl. 1.2-1. Sile između tačkastih naelektrisanja

Ako su posmatrana tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2 postavljena na međusobnom rastojanju r (sl. 1.2-1) u vakuumu, međusobne sile između njih su:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \mathrm{k}\frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2} \approx 9\cdot 10^9 \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2}$$

$\hat{r}$ jedinični vektor (ort)

ε_0 dielektrična propustljivost (konstanta) vakuuma

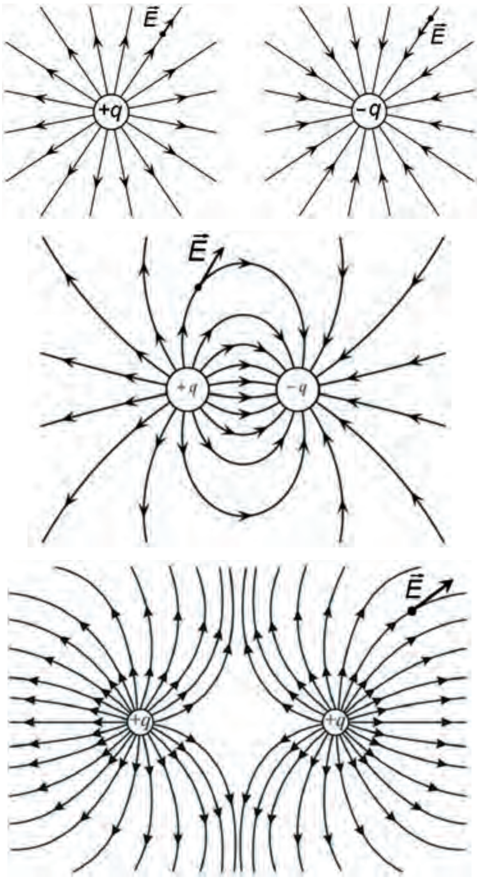
Ako su naelektrisanja istog znaka elektrostatičke sile su odbojne a kod naelektrisanja suprotnog znaka sile su privlačne. Ove sile se nazivaju još i Kulonovim silama. Pošto se radi o dve jednake sile samo suprotnog znaka govori se o sili u jednini.

Veličina ε_0 predstavlja *dielektričnu propustljivost* vakuuma. Naziva se još i *dielektričnom konstantom* ili *permitivnošću* vakuuma. Njena veličina je izvedena iz brzine svetlosti i magnetne permeabilnosti vakuuma i iznosi:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = \frac{10^7}{299792458^2 \cdot 4 \cdot \pi} \approx 8{,}854187818....\cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Za vazduh se može smatrati da je dielektrična propustljivost jednaka kao i kod vakuuma. U drugim sredinama ona se može znatno razlikovati.

Kada postoji više naelektrisanih tela onda postoje sile između svih tela pojedinačno. Sila na jedno naelektrisano telo dobija se vektorskim sabiranjem pojedinačnih sila. Ovaj stav je posledica linearnosti sredine i predstavlja *princip superpozicije* za elektrostatičke sile.



Sl. 1.3-1. Linije električnog polja

1.3. Električno polje

Pojava Kulonove sile objašnjava se postojanjem električnog polja u prostoru oko naelektrisanja. Iz toga proizilazi i definicija električnog polja i pod njim se podrazumeva stanje prostora u kome se pojavljuje sila na naelektrisanje u mirovanju. Jačina električnog polja je količnik sile i naelektrisanja na koje ona deluje. Jačina električnog polja koje potiče od tačkastog naelektrisanja q na rastojanju r iznosi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \mathrm{k}\frac{q\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2}$$

Jačina električnog polja je vektorska veličina a jedinica mere je V/m.

Kada postoji više naelektrisanih tela onda je jačina rezultantnog električnog polja u nekoj tački jednaka vektorskom zbiru pojedinačnih jačina polja od svih naelektrisanih tela. Ovaj stav predstavlja *princip superpozicije* za električna polja.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots \vec{E}_n = \sum_n \vec{E}_i$$

Ovako izračunavanje električnog polja vrši se za tačkasta naelektrisanja, Za složenije oblike postoje i druge metode izračunavanja električnog polja.

Električno polje se vizuelno predstavlja linijama električnog polja (sl. 1.3-1). Linija polja je linija čija se tangenta u svakoj tački prostora poklapa sa pravcem vektora polja. U matematičkom obliku to je:

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}$$

Za pozitivno tačkasto naelektrisanje linije polja radijalno izlaze iz centra, ravnomerno u svim pravcima. Kod negativnog naelektrisanja slika je slična, samo je smer suprotan (linije ulaze u naelektrisanje). Slični oblici polja su kod naelektrisanog tela sfernog oblika. Kod tela cilindričnog oblika linije polja imaju pravce normalne na osu cilindra ravnomerno u svim pravcima. Kod naelektrisanja velike ravne površine linije polja su paralelne i normalne na površinu.

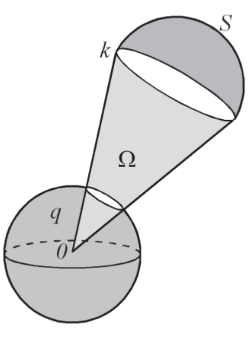
Oblike linija električnog polja moguće je izračunati za oblike naelektrisanog tela sa visokim stepenom simetrije. To su sfere, dugački cilindri, velike ravne površine itd. Za proizvoljne oblike mogu se izračunati delić po delić zapremine metodom konačnih elemenata. Postoje i eksperimentalne metode kao što je elektrolitička kada i slično.

Električno polje napreže sredinu i postoji granica do koje se može ići. Na primer za vazduh pod normalnim atmosferskim pritiskom maksimalna jačina električnog polja za razmak elektroda od 1 cm iznosi oko 3 MV/m. Iznad toga dolazi do jonizacije vazduha koja se manifestuje pojavom korone, varnice ili luka. Maksimalna jačina polja je važna karakteristika dielektričnih sredina i naziva se još i *dielektrična čvrstoća* (ili *probojnost*).

1.4. Prostorni ugao i fluks električnog polja

Ugao u ravni izražen u radijanima definisan je kao količnik dužine luka (l) i njegovog poluprečnika (r). Slično tome definisan je i prostorni ugao. Prostorni ugao (Ω) se izražava u steradijanima (strad) i jednak je količniku površine na sferi poluprečnika (r) ograničene konturom C, i kvadrata poluprečnika sfere (sl. 1.4-1). Pod istim prostornim uglom vide se i sve površine koje se oslanjaju na konturu C na sferi tako da je prostorni ugao:

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^2} = \frac{S_{Nasferi}}{r^2}$$



Sl. 1.4-1. Prostorni ugao

Skalarni proizvod u brojiocu ($\vec{r} \cdot d\vec{S}$) podrazumeva projekciju proizvoljne diferencijalne površine na površinu sfere. Površinski integral ovog proizvoda po zatvorenoj površini jednak je površini sfere ($S_{\mathrm{Sfere}}=4\pi r^2$) tako da je prostorni ugao cele sfere:

$$\Omega_{\mathrm{Sfere}} = \oiint_S \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^2} = \frac{S_{\mathrm{Sfere}}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

1.5. Gausov zakon

Pojam fluksa potiče iz hidrodinamike i protoka tečnosti kroz posmatrani poprečni presek. Na sličan način uveden je i fluks električnog polja.

Deo fluksa (tuba) električnog polja koji prolazi kroz površinu *S* (sl. 1.4-1) je:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^S \frac{\hat{r}d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\Omega d\Omega = \frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

Jačina fluksa električnog polja je gustina fluksa električnog polja po jedinici prostornog ugla i za tačkasto naelektrisanje ona je:

$$\Phi_{E\Omega} = \frac{d\Phi_E}{d\Omega} = \frac{\Phi_E}{\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Za zatvorenu površinu koja obuhvata naelektrisanje (q), prostorni ugao je $\Omega=4\pi$, i fluks električnog polja kroz ovu površinu je:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ovaj fluks zavisi samo od količine elektriciteta (q) obuhvaćenog zatvorenom površinom, a ne zavisi od geometrijskih dimenzija naelektrisanog tela. Ako je umesto tačkastog naelektrisanja naelektrisano telo proizvoljnog oblika ono se može podeliti na beskonačno mnogo tačkastih naelektrisanja čija je zapreminska gustina ρ. Ukupan fluks električnog polja za telo je jednak beskonačnom zbiru (integralu) flukseva tačkastih naelektrisanja od kojih je sastavljeno telo.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

To znači da gornji izraz važi i za naelektrisano telo proizvoljnog oblika obuhvaćeno površinom *S*. Ovaj fluks je nezavisan od oblika zatvorene površine koja se posmatra.

Ova jednakost ima veliki značaj u elektrostatici i predstavlja *Gausov zakon*.

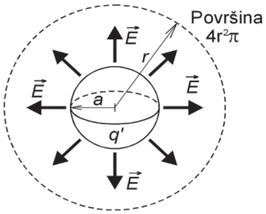
Gausov zakon je pogodan za izračunavanje jačine električnog polja naelektrisanih tela sa visokim stepenom simetrije. Tada se može odabrati površina sa istom jačinom električnog polja (Gausova površina). Jačina polja može izvući ispred integrala a integral se svodi na izračunavanje površine.

Primeri

Električno polje naelektrisane sfere

Posmatrajmo naelektrisanu sferu kao na sl. 1.5-1. Ako se odabere lopta poluprečnika r ($r>a$) koncentrična sa naelektrisanom sferom, jačina električnog polja na površini lopte je konstantna a vektori električnog polja i diferencijalne površine međusobno normalni. Za tako postavljenu loptu Gausov zakon je:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oiint_S dS = ES_{lopte} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Sl. 1.5-1. Električno polje naelektrisane sfere

Jačina električnog polja na udaljenosti *r* je: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Električno polje je radijalno pa je u vektorskom obliku:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2}$$

Maksimalna jačina polja je na površini sfere i iznosi:

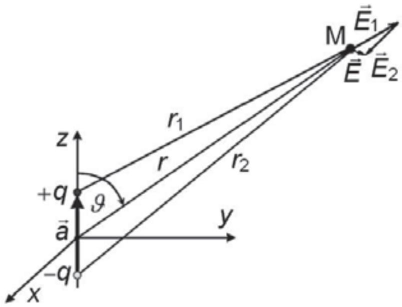
$$E_{\max} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

Probojnost vazduha je oko $E_{\max,\text{vazd}} \approx 3$ MV/m. Maksimalno moguća površinska gustina naelektrisanja sfere je:

$$\eta = \varepsilon_0 E_{\max} = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot3\cdot10^6 = 2{,}65\cdot10^{-5} = 26{,}5\,\mu\text{C/m}^2$$

Električno polje simetričnog dipola

Simetrični dipol (sl. 1.5-2) se sastoji od dva jednaka naelektrisanja (*q*) suprotnog znaka postavljena na međusobnom rastojanju (*a*). Pojedinačna električna polja ovih naelektrisanja su:



Sl. 1.5-2. Električno polje dipola

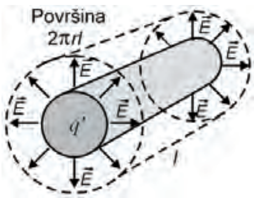
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}_1}{r_1^2} \qquad \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}_2}{r_2^2}$$

Rezultantno električno polje jednako je vektorskom zbiru ova dva polja.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_1}{r_1^2} - \frac{\hat{r}_2}{r_2^2}\right)$$

Dalje je potrebno odabrati *k-o* sistem i izračunati zbir ova dva vektora. To će biti urađeno nešto kasnije preko potencijala.

Električno polje dugačkog podužno naelektrisanog cilindra



Sl. 1.5-3. Naelektrisani cilindar

Posmatrajmo dugačak cilindara prema sl. 1.5-3. Ovde treba odabrati cilindičnu površinu poluprečnika *r*, koaksijalnu sa naelektrisanim cilindrom. Jačina električnog polja na površini omotača cilindra je konstantna i vektori električnog polja i diferencijalne površine međusobno normalni. Kroz baze cilindra nema fluksa jer su vektori električnog polja i površine normalni.

Za tako postavljen cilindar Gausov zakon je:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oiint_S dS = ES_{cilindra} = E2r\pi l = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Jačina električnog polja na udaljenosti r je:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Ovakva situacija ima se i na provodnicima voda. Maksimalna jačina električnog polja na površini provodnika poluprečnika a je:

$$E_{\max} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Dobijeni izraz ne zavisi od dimenzija cilindrične površine tako da važi i za neograničenu naelektrisanu nit.

Ako naelektrisani cilindar ima poluprečnik a umesto podužnog, naelektrisanje se može izraziti preko površinske gustine (η).

$$q' = \frac{q}{l} = \frac{2\pi a}{2\pi a}\frac{q}{l} = 2\pi a\frac{q}{S} = 2\pi a\eta$$

Sada je jačina električnog polja:

$$E = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi a\eta}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\eta a}{\varepsilon_0 r}$$

Jačina električnog polja dvožičnog voda

Kod dvožičnog voda (sl. 1.5-4) može da se izračuna jačina električnog polja u ravni voda. Na rastojanju r od ose provodnika *1* jačina električnog polja je:

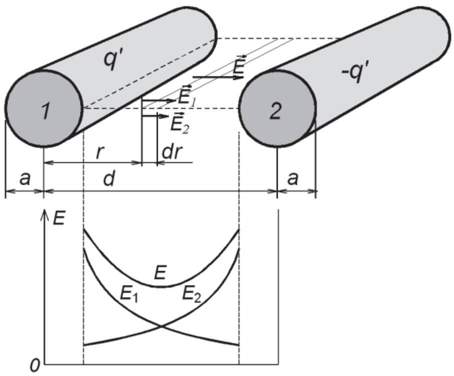
$$E_r = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r(d-r)}$$

Najmanja jačina polja je u ravni voda, na polovini razmaka provodnika i iznosi:

$$E_{\min} = \frac{2q'}{\pi\varepsilon_0 d}$$

Najveća jačina polja je u ovoj ravni na površini provodnika ($r=a$ i $r=d-a$) i iznosi:

$$E_{\max} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{a(d-a)} \approx \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



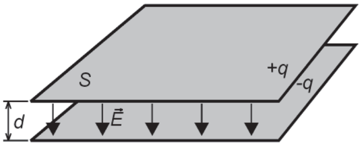
Sl. 1.5-4. Električno polje dvožičnog voda

Na sl. 1.5-4. prikazane su jačine polja oba provodnika kao i ukupnog polja.

Napomena: Ovo su približni izrazi i važe za $d >> a$. Za manje razmake treba uzeti u obzir i ogledanje naelektrisanja u provodnicima konačnih dimenzija (vidi 1.12).

Električno polje između naelektrisanih ravni

Posmatrajmo dve paralelne provodne ravni (sl. 1.5-5.) sa poprečnim dimenzijama mnogo većim od rastojanja (*d*). Ako su ravni naelektrisane (površinskom gustinom naelektrisanja η) između njih polje je homogeno. Za primenu Gausovog zakona može se zamisliti zatvorena površina koja obuhvata deo pozitivno naelektrisane ravni tako da je njena jedna strane u prostoru između ploča a druga sa spoljne strane ravni. Ovde fluks električnog polja postoji samo u delu između ravni. Za tako postavljenu zatvorenu površ Gausov zakon je:



Sl. 1.5-5. Naelektrisane ravni

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\oiint_S \mathrm{d}S = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta S}{\varepsilon_0}$$

Jačina polja između ravni je: $E = \dfrac{\eta}{\varepsilon_0}$

Električno polje naelektrisane ploče

U odnosu na ravan ploča ima dve površine. Električno polje naelektrisane ploče je sa obe strane. Površina u Gausovom zakonu je sada dvostruko veća.
Jačina električnog polja sa obe strane ploče je:

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}$$

Ako se fluks računa samo u delu zatvorene površine govori se o *tubama fluksa*. One se sastoje od osnovica sa površinama normalnim na vektor električnog polja i omotača čije su izvodnice kolinearne sa vektorima polja. Kod tuba fluks postoji samo kroz osnovice a u omotaču je jednak nuli.

1.6. Divergencija vektora električnog polja

Prema Gausovom zakonu fluks električnog polja naelektrisanog tela kroz zatvorenu površ koja obuhvata to telo proporcionalan je naelektrisanju tela. Ako je telo naelektrisano zapreminskom gustinom naelektrisanja (ρ) onda se fluks električnog polja kroz zatvorenu površinu *S* može izraziti u obliku:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

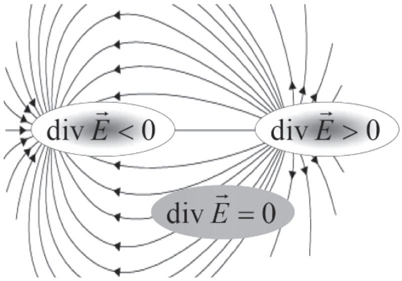
Zamislimo tačku M u zapremini (*V*) obuhvaćenoj zatvorenom površi (*S*). Kada se fluks vektora električnog polja kroz zatvorenu površ diferencira po zapremini (podeli sa zapreminom uz uslov da je ta zapremina veoma mala), dobija se divergencija električnog polja u tački M.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sada je: $$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Jednakost zapreminskog integrala divergencije polja i površinskog integrala polja po zatvorenoj površini oko posmatrane zapremine, naziva se teoremom Ostrogradskog (ili Gaus – Ostrogradskog).

Divergencija vektorskog polja $\vec{E}$ je zapreminska gustina izvora ovog polja. Zbog toga naziva i *izvornost polja*. Najpribližnije značenje reči divergencija je razilaženje. Jedinica za divergenciju električnog polja je V/m^2.



Sl. 1.6-1. Divergencija električnog polja [8]

Sa matematičke strane divergencija je vektorska operacija koja se primenjuje u vektorskom polju kao skalarni proizvod operatora „nabla“ i vektora polja.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

∇ Hamiltonov operator „nabla“

Divergencija vektora je skalarni proizvod operatora nabla i vektora posmatranog polja. Jačina električnog polja je vektor koji se izražava koordinatama u zavisnosti od koordinatnog sistema. Kada se dva vektora u prostoru pomnože skalarno rezultat je skalar koji se sastoji od tri proizvoda kolinearnih vektora po osama *k-o* sistema.

Operator „nabla“ u Dekartovom *k-o* sistemu je: $\nabla \equiv \vec{\nabla} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\vec{k}$

Sa ovim divergencija je:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}k\right)\cdot\left(E_x i + E_y j + E_z k\right) = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z}$$

Za ostale koordinatne sisteme izrazi za divergencije dati su u dodatku.

Električno polje izraženo preko divergencije je diferencijalni oblik Gausovog zakona i predstavlja jednu od Maksvelovih jednačina. To je Gausov zakon za mali (lokalni) deo prostora, skoro tačku u njemu. Za pozitivno naelektrisanje divergencija električnog polja je pozitivna što znači da je ono izvor električnog polja. Za negativno naelektrisanje divergencija električnog polja je negativna tako da električno polje uvire u negativnom naelektrisanju. U prostoru bez naelektrisanja divergencija je nula (sl. 1.6-1).

1.7. Rad, potencijal i napon električnog polja

Rad je mehanička veličina definisana kao skalarni proizvod sile i puta pređenog pod njenim dejstvom. Ako sila nije konstantna onda se definiše diferencijalni rad a ukupan rad je njegov integral po liniji puta. Ako se pređeni put nalazi između krajnjih tačaka A i B rad je:

$$A = \int_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Skalarni proizvod znači da rad vrši samo komponenta sile kolinearna sa putem.

U elektrostatičkom polju samo Kulonova sila može da vrši rad. Za pređeni put između krajnjih tačaka A i B rad elektrostatičke (Kulonove) sile je:

$$A_E = \int_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Prema zakonu održanja energije, ako ne postoje gubici pri kretanju (na primer trenje), rad sile na putu od tačke A do B i nazad do A jednak nuli. Pošto je naelektrisanje konstantno znači da je integral skalarnog proizvoda vektora *E* i *dl* po zatvorenoj putanji jednak nuli:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Putanje od tačke A do B i od B do A mogu biti proizvoljne. To znači da rad sile na putu između dve tačke ne zavisi od putanje već samo od njenih krajnjih tačaka. Ovaj integral po zatvorenoj površini predstavlja *cirkulaciju* vektora elektrostatičkog polja. Polja kod kojih je cirkulacija jednaka nuli nazivaju se *potencijalnim* ili *bezvrtložnim*.

Ako se u elektrostatičkom polju izabere tačka R i proglasi za referentnu, rad koji elektrostatička sila izvrši pomerajući jedinično naelektrisanje iz tačke A u referentnu naziva se *potencijalom* tačke A.

$$V_A = \int_A^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Rad koji elektrostatička sila izvrši pomerajući jedinično naelektrisanje iz tačke A u tačku B predstavlja razliku potencijala tačaka A i B. Ova razlika potencijala predstavlja *napon* između tačaka A i B.

$$U_{A-B} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_B^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_A - V_B$$

Potencijal i napon su skalarne veličine. Jedinica za potencijal i napon u SI sistemu je *volt* (oznaka V).

Kod napona je važan redosled tačaka između koji se posmatra tako da važi:

$$U_{A-B} = -U_{B-A}$$

To znači da se pri merenju napona menja njegov znak ako merne sonde zamene mesta.

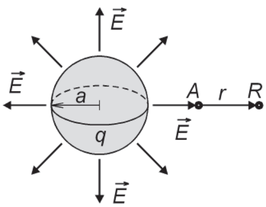
Primeri: U narednim primerima koristiće se rezultati za polja iz primera u 1.5.

Potencijal u električnom polju naelektrisane sfere

Za sferu (sl. 1.7-1) poluprečnika a potencijal tačke A u odnosu na referentnu (R) je:

$$V_A = \int_{r_A}^{r_R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_R} \frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_R} \right)$$

Ovde može da se uzme da je referentna tačka beskonačno udaljena. U tom slučaju raspodela napona oko sfere je:



Sl. 1.7-1.
Naelektrisana sfera

$$U_A = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

Napon sfere je: $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

Maksimalna jačina polja je na površini sfere i iznosi:

$$E_{\max} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{U}{a}$$

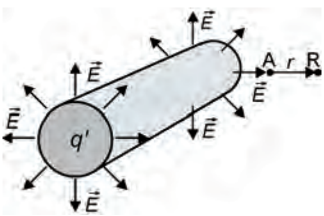
Za dielektričnu probojnost vazduha od $E_{\max}$=3 MV/m prečnik sfere u zavisnosti od napona treba da bude:

$$2a \approx \frac{U}{E_{\max}} \approx \frac{2U}{3 \cdot 10^6} \approx 0{,}67 \cdot 10^{-6} U$$

Na primer za napon od 100 kV potrebna je sfera prečnika 2a=6,7 cm.
Da ne bi došlo do korone na sferi njen prečnik mora biti veći od: $a > U / E_{\max}$.

Potencijal u električnom polju pravog provodnika

Za prav provodnik sl. 1.7-2. kružnog preseka poluprečnika a sa podužnim naelektrisanjem q' jačina električnog polja na udaljenosti r je:



Sl. 1.7-2. Prav provodnik

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Sa ovim električnim poljem potencijal tačke A u odnosu na referentnu (R) je:

$$V_A = \int_{A}^{R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0} \int_{A}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_R}{r_A}$$

Ovde se ne može uzeti beskonačnost za referentnu tačku (nulti potencijal) jer bi izraz težio beskonačnosti.

Maksimalna jačina električnog polja na površini provodnika poluprečnika a je:

$$E_{\max} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Napon dvožičnog voda

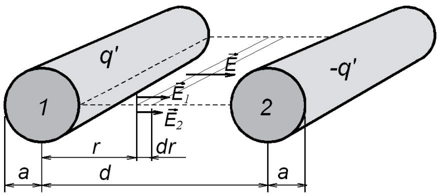
Posmatrajmo dvožični vod prema sl. 1.7-3. Potencijal u ravni koju definišu ose provodnika jednak je zbiru potencijala koji potiču od oba provodnika. Pošto su provodnici jednaki napon voda je:

$$U = 2\int_a^{d-a} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q'}{\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q'}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{q'}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

Jačina polja na površini provodnika je:

$$E_a = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}\right) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{a(d-a)} \approx \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Veza napona voda i maksimalnog električnog polja je:



Sl. 1.7-3. Dvožični vod

$$E_{\max} \approx \frac{U_{\max}}{2a\ln\dfrac{d}{a}}$$

Napon voda pri kome dolazi do prekoračenja kritičnog električnog polja je:

$$U_{\max} \approx 2E_{\max}a\ln\frac{d}{a}$$

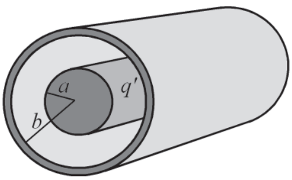
<u>Primer</u>. Dvožični vod sa provodnikom prečnika $2a$=22 mm i razmakom od d=3,3 m, može da ima maksimalni napon (u pogledu pojave korone):

$$U \approx 2aE_{\max}\ln\frac{d}{a} = 0{,}022\cdot 3{,}1\cdot 10^6\cdot\ln\frac{330}{1{,}1} \approx 0{,}022\cdot 3\cdot 10^6\cdot 5{,}7 \approx 375\,\mathrm{kV}$$

Ovo odgovara efektivnoj vrednosti napona od 265 kV. Što je iznad napona dalekovoda nazivnog napona 220 kV. Već za napon 400 kV moraju se koristiti provodnici u snopu (dva provodnika na razmaku od 25 ... 40 cm) po fazi.

Kod vodova sa više provodnika svaki provodnik, u posmatranoj tački prostora stvara svoj potencijal. To se kasnije odražava na kapacitet zbog čega se pojavljuju parcijalne kapacitivnosti. Ovo se detaljno analizira u oblasti prenosa električne energije.

Napon koaksijalnog voda

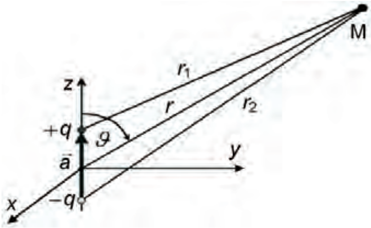


Sl. 1.7-4. Koaksijalni vod

Za koaksijalni vod sl. 1.7-4. sa prečnicima unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika a i b, napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je:

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Potencijal u električnom polju simetričnog dipola



Sl. 1.7-5. Potencijal u polju dipola

Posmatrajmo simetrični dipol prema sl. 1.7-5. Potencijali u tački M od pojedinačnih naelektrisanja dipola, u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti su:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad V_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

Potencijal u tački M dipola, je:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Jer je: $r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$ i $r_1 r_2 \approx r^2$

1.8. Cirkulacija i rotor električnog polja

Integral jačine električnog polja po zatvorenoj konturi predstavlja *cirkulaciju vektora* $\vec{E}$. U elektrostatičkom polju cirkulacija ovog polja je jednaka nuli.

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Posmatrajmo tačku M na površini (S) ograničenoj zatvorenom konturom (k). Kada se cirkulacija vektora električnog polja duž konture podeli sa površinom konture uz uslov da je ta površina veoma mala, dobija se modul rotora električnog polja.

$$\left|\mathrm{rot}\vec{E}\right| = \frac{d}{dS}\oint_k \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_k \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Sada je:
$$\oint_k \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Jednakost površinskog integrala rotora polja, i linijskog integrala polja po zatvorenoj konturi oko posmatrane površine naziva i Stoksovom teoremom.

Izražen preko operatora “nabla“, rotor električnog polja u elektrostatici je.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Kod rotora operator nabla se primenjuje nad vektorom električnog polja ($\vec{E}$) u obliku vektorskog proizvoda tako da se dobija vektor.

Ovo je diferencijalni (ili lokalni) oblik za cirkulaciju električnog polja i odnosi se na posmatranu tačku u prostoru. Ovaj izraz predstavlja još jednu od Maksvelovih jednačina i odnosi se na elektrostatičko polje.

Reč rotor znači vrtlog. Smisao rotora je taj da on predstavlja površinsku gustinu izvora vrtložnog polja koje se zatvara oko izvora u posmatranoj tački. U elektrostatici izvori vrtložnog polja ne postoje i takvo polje je *bezvrtložno*. Ranije je pokazano da je divergencija polja u nekim tačkama (gde ima naelektrisanja) različita od nule.

Definicija: Polje kod koga je u svim tačkama polja $\mathrm{rot}\vec{a}=0$, a $\mathrm{div}\vec{a}\neq 0$ bar u nekim tačkama polja, je *potencijalno* ili *bezvrtložno*.

Pošto se radi o vektorskom proizvodu rezultat je vektor koji ima tri projekcije po osama. Vektorski proizvod kolinearnih komponenti jednak je nuli. Zbog toga komponente rotora se sastoje od po dve razlike proizvoda ortogonalnih komponenti.

Za Dekartov koordinatnom sistem rotor električnog polja je dat izrazom:

$$\mathrm{rot}\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{E}=\left(\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}y}\right)\vec{k}=0$$

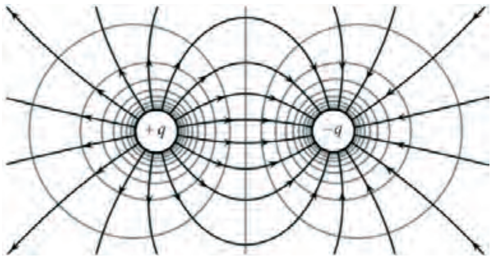
Za ostale koordinatnom sisteme izrazi za rotor dati su u dodatku.

1.9. Ekvipotencijalne površi

Površi u električnom polju čije su tačke na istom potencijalu nazivaju se *ekvipotencijalnim*. Da bi dve bliske tačke u električnom polju bile na istom potencijalu potrebno je da bude:

$$U_{A-B}=V_A-V_B=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

Da bi napon bio jednak nuli potrebno je da je skalarni proizvod $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ bude jednak nuli. On je jednak nuli ako su vektori električnog polja i elementa putanje pod pravim uglom (međusobno normalni). To dalje znači da su linije polja normalne na ekvipotencijalne površi (sl. 1.9-1).



Sl. 1.9-1. Linije polja i ekviotencijalne površi dva jednaka suprotna naelektrisanja

1.10. Veza između jačine električnog polja i potencijala

Posmatrajmo sada dve ekvipotencijalne površi sa potencijalima V_1 i V_2. Napon između njih je:

$$U_{2-1}=V_2-V_1=\Delta V=-\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$$

Ako su vektori $\vec{E}$ i $\Delta\vec{l}$ kolinearni razlika potencijala je: $\Delta V=-E\cdot\Delta l$

Jačina električnog polja je: $E=-\dfrac{\Delta V}{\Delta l}$

Izraz pokazuje da se jačina polja može izraziti kao izvod potencijala u pravcu normalnom na ekvipotencijalnu površ. Usmereni izvod potencijala u nekom pravcu predstavlja njegov gradijent.

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}V=-\vec{\nabla}\cdot V$$

Fizički smisao gradijenta potencijala je *linijska gustina potencijala* a jedinica kojom se izražava je V/m kao i za jačinu električnog polja. Izraz za gradijent zavisi od koordinatnog (*k-o*) sistema. U Dekartovom *k-o* sistemu gradijent potencijala (V) je:

$$\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}j + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}k$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jedinični vektori (ortovi) za koordinatne ose x, y i z.

Za ostale koordinatne sisteme izrazi za gradijente dati su u dodatku.

Primeri: *Električno polje tačkastog naelektrisanja*

U sfernom koordinatnom sistemu potencijal u tački polja je: $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Gradijent u sfernom koordinatnom sistemu je:

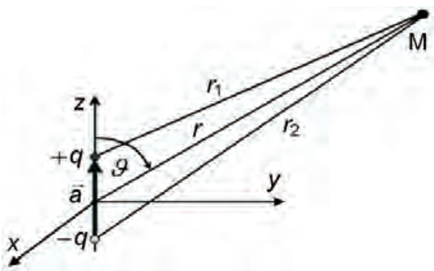
$$\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\mathrm{d}\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Sa ovim jačina električnog polja je: $\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e}_r$

Kod tačkastog naelektrisanja električno polje ima samo radijalnu komponentu i njegova jačina je:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Električno polje simetričnog dipola



Sl. 1.10-1. Električno polje dipola

U sfernom koordinatnom sistemu potencijal u tački *M* (sl. 1.10-1), u polju električnog dipola je:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Kada se na potencijal primeni gradijent u sfernom *k-o* sistemu, električno polje je:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\vartheta}\vec{e}_\vartheta\right)$$

Ovde postoje dve komponente polja:

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{qa\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\varphi = 0$$

Električno polje pravog provodnika

Potencijal tačke u polju pravog provodnika u odnosu na referentnu tačku je:

$$V = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_R}{r}$$

Ovde se radi o cilindričnom koordinatnom sistemu i gradijent u njemu je:

$$\mathrm{grad}V = \vec{\nabla} V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z$$

Sa ovim jačina električnog polja je: $\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$

Ovde postoji samo radijalna komponenta polja i njegova jačina je:

$$E_r = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

1.11. Poasonova i Laplasova jednačina

U prethodnim razmatranjima određena je međusobna veza jačine električnog polja i naelektrisanja. Posle toga određena je veza između električnog polja i potencijala. To znači da se dalje može odrediti i direktna veza između potencijala i naelektrisanja.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{i} \qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\vec{\nabla} \cdot V$$

Iz ove dve relacije je: $\mathrm{div}(\mathrm{grad}V) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

U opštem slučaju gustina naelektrisanja (r) je funkcija položaja te tačke. Izraženo preko vektorskog operatora „nabla“, ova veza je:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}V) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \nabla V = \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ Laplasov operator (laplasijan)

Ovaj izraz poznat je pod imenom *Poasonova jednačina*. Ona daje direktnu vezu između potencijala i prostorne gustine naelektrisanja. Odnosi se na tačku u prostoru i primenljiva je za deo prostora u kome postoje prostorno raspoređena naelektrisanja.

Laplasijan je prostorni izvod drugog reda skalarne funkcije (u ovom slučaju V).

U pravougaonom (Dekartovom) koordinatnom sistemu ova jednakost je:

Poasonova jednačina: $$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

U delu prostora bez naelektrisanja važi:

Laplasova jednačina: $$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

Poasonova i Laplasova jednačina imaju širi značaj pa se mogu sresti i na drugim mestima (na primer kod magnetnog vektor potencijala).

1.12. Provodnici u elektrostatičkom polju

Karakteristika provodnika je da sadrži slobodne elektrone koji se kreću i pri najmanjem električnom polju. Pošto se ovde razmatra elektrostatika, posmatra se samo njihovo stacionarno stanje. Kada nema kretanja naelektrisanja znači da unutar provodnika ne postoji električno polje.

Unutar provodnika je: $\vec{E} = 0$

Zbog ovoga kada se na provodnik dovede neko naelektrisanje ono se raspodeljuje po površini. Kako nema kretanja naelektrisanja ni po površini sledi da ne postoji tangencijalna komponenta polja. Zbog ovoga površina tela je na istom potencijalu. Isto važi i za celu njegovu zapreminu.

Iz naelektrisanog metalnog tela izlaze (ili ulaze) linije polja i pošto nema tangencijalne komponente one su upravne na površ provodnika.

Provodno telo naelektrisano je u tankom površinskom sloju, površinskom gustinom naelektrisanja (η). Primenjujući Gausov zakon na malu zatvorenu graničnu površinu između tela i vakuuma dobija se:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S = E \oiint_S \mathrm{d}S = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta S}{\varepsilon_0}$$

Odavde je jačina električnog polja u vakuumu na metalnoj površini: $E = \dfrac{\eta}{\varepsilon_0}$

Ako je provodno naelektrisano telo oblika sfere poluprečnika a, njegov napon je:

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\eta 4\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \eta \frac{a}{\varepsilon_0}$$

Za zadati potencijal na sferi, električno polje na površini sfere je: $E = \dfrac{\eta}{\varepsilon_0} = \dfrac{V_a}{a}$

Ovo pokazuje da, uz isti napon, što je poluprečnik sfere manji to je električno polje jače. To se približno može primeniti i na delove sfere. Tako na mestima pod visokim naponom sa oštrim ivicama ili šiljcima električno polje može biti toliko jako da može doći i do električnog proboja (varnice ili korone).

Električno polje unutar provodnog tela jednako je nuli. To znači da ako se provodno telo nalazi u električnom polju na njemu se naelektrisanja moraju rasporedi tako da unutar njega nema električnog polja.

Posmatrajmo sada provodnu loptu oko naelektrisanog tela. Da bi električno polje unutar metalne ljuske bilo jednako nuli obuhvaćeno naelektrisanje mora biti nula. To znači da će u ovom slučaju unutrašnja strana lopte da se naelektriše istom količinom elektriciteta, ali suprotnog znaka, kao što je naelektrisanje unutar lopte. Ostatak naelektrisanja (isti po veličini) rasporediće se na spoljašnjoj površini lopte. Van lopte električno polje će biti kao da se radi o tačkastom naelektrisanju sa količinom elektriciteta unutar lopte.

Ako se ista provodna lopta nađe u spoljnjem električnom polju polje u njenoj unutrašnjosti jednako je nuli. Ovo je princip rada takozvanog Faradejevog kaveza. Ovde je korišćen loptasti oblik provodnog tela jer je on najjednostavniji za analizu. Slični zaključci važe i za druge oblike tela.

Posmatrajmo sada naelektrisani oblak iznad zemlje. Zemlja je provodnik i u njoj polje mora biti jednako nuli. Da bi se to postiglo potrebno je da naelektrisanje na zemlji ispod oblaka bude suprotnog znaka od naelektrisanja oblaka.

Ova pojava, da u provodnim telima dolazi do razdvajanja i preraspodele naelektrisanja naziva se *elektrostatičkom indukcijom*.

U praksi elektrostatička indukcija nalazi primenu, na primer kod elektrostatičkih filtera za prečišćavanje dimnih gasova u industriji. Elektrostatički filter ima jednu elektrodu u obliku razvučene žice pod visokim naponom. Spoljna elektroda je u obliku provodnog cilindra i uzemljena. Žica pod visokim naponom oko sebe stvara nehomogeno elektrostatičko polje usmereno zrakasto prema okolini. Dimni gasovi se propuštaju kroz ovaj filter. U jakom elektrostatičkom polju sitne čestice se elektrišu sa jedne strane pozitivno sa druge negativno. Zbog nehomogenosti polja sila na naelektrisanje prema visokonaponskoj žičanoj elektrodi je veća od one suprotne, i čestice se lepe za ovu elektrodu. Elektroda se povremeno čisti otresanjem a dimni gasovi koji odlaze dalje u dimne kanale i dimnjak su praktično bez mehaničkih čestica (prašine).

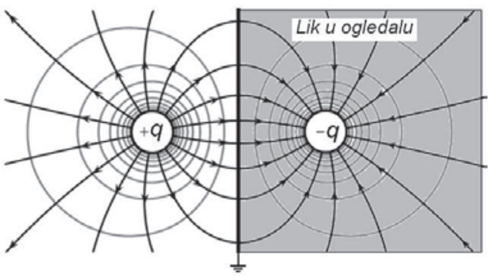
Drugi primer primene elektrostatičke indukcije u industriji su elektrostatički separatori čestica.

<u>Teorema o metalizaciji ekvipotencijalnih površi</u>

Ako se u položaj ekvipotencijalnih površi postavi tanki sloj provodnika (folija) neće doći do nikakvih promena polja. U ovom sloju nema tangencijalne komponente polja tako da nema kretanja naelektrisanja u metalnoj površi i električno polje sa obe strane metalne folije ostaje nepromenjeno. Ova tvrdnja predstavlja *teoremu o metalizaciji ekvipotencijalnih* površi.

<u>Princip lika u ogledalu</u>

Posmatrajmo naelektrisanja na sl. 1.12-1. Dva jednaka naelektrisanja suprotnog znaka postavljena na rastojanju (a) predstavljaju simetrični dipol. Potencijal u nekoj tački polja određenoj razmacima r_1 i r_2 simetričnog dipola je:



Sl. 1.12-1. Princip lika u ogledalu

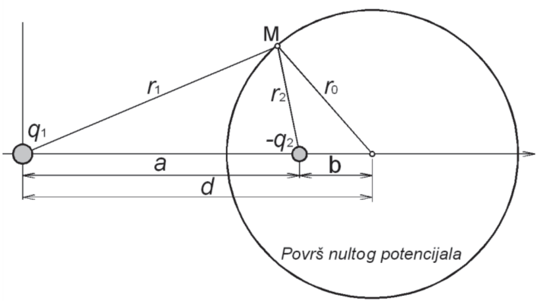
$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Posmatrajmo ekvipotencijalnu površ sa nultim *potencijalom*. Za ovu strukturu nulti potencijal se dobija kada je $r_1=r_2$. Geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje su podjednako udaljene od oba naelektrisanja je njihova simetralna ravan.

Ako se ova ravan zameni uzemljenom metalnom ravnom površinom polje na obe strane ostaje nepromenjeno. Ako sada uklonimo naelektrisanje sa druge strane (na primer $-q$), polje sa desne strane ravni će biti jednako nuli. Međutim sa leve strane ravni polje ostaje nepromenjeno. Sada se govori o poluprostoru u kome se nalazi naelektrisanje $+q$. Električno polje u tom poluprostoru jednako je polju kao da se sa druge strane ravni, na istoj udaljenosti nalazi naelektrisanje $-q$. Ovaj zaključak je veoma koristan i predstavlja *princip lika u ogledalu* (*princip ogledanja*).

Primenom ovog principa mogu se neki složeniji slučajevi naelektrisanih tela svesti na prostije za koje se može odrediti jačina polja. Tako se može pokazati da je indukovano naelektrisanje na zemlji od naelektrisanog oblaka jednako liku oblaka u ogledalu (ista količina elektriciteta ali suprotnog znaka). Električno polje provodnika dalekovoda iznad zemlje može se dobiti ako se zemlja zameni likom provodnika u ogledalu.

Ako naelektrisanja nisu jednaka (sl. 1.12-2.) situacija je nešto komplikovanija. Ovo je opštiji slučaj i pokazuje se da je ekvipotencijalna površina nultog potencijala oblika sfere oko manjeg naelektrisanja. Podaci o sferi dobijaju se iz uslova:



Sl. 1.12-2. Ekvipotencijalna površ sa nultim potencijalom za dva različita naelektrisanja

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{q_1}{q_2} = k > 1$$

Primenom pravila geometrije odnosi dimenzija prema sl. 1.12-2. su:

$$r_0 = kb = \frac{ka}{k^2-1}, \quad b = \frac{a}{k^2-1}$$

$$d = a + b = \frac{k^2 a}{k^2-1} = k^2 b = k r_0$$

<u>Primer</u>: Pomoću ovih izraza može se odrediti električno polje između tačkastog naelektrisanja i uzemljene sfere. Posmatrajmo naelektrisanje q_1 i u njegovoj blizini metalnu sferu na nultom potencijalu. U sferi će se indukovati tačkasto naelektrisanje q_2 kao lik u ogledalu sa naelektrisanjem q_1 ($q_2<q_1$) koje zadovoljava ove jednačine. Za zadati prečnik kugle r_0 i rastojanje d, koeficijent k je:

$$k = \frac{d}{r_0}$$

Naelektrisanje lika u ogledalu je: $q_2 = \dfrac{q_1}{k}$

Udaljenost (a) lika u ogledalu (naelektrisanja q_2) od naelektrisanja q_1 je:

$$a = d\,\frac{k^2-1}{k^2}$$

Dalje se analiza polja vrši kao da su u pitanju dva tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2 na međusobnom rastojanju a.

Kada su u pitanju dve naelektrisane sfere dolazi do obostranog ogledanja tačkastih naelektrisanja postavljenih na različitim rastojanjima. Zbog toga proračun polja postaje dosta složen.

Najveća jačina polja je između najbližih tačaka dve sfere. Najveća jačina polja koja se može postići u vazduhu ograničena je njegovom probojnom čvrstoćom.

Sistem sa dve bliske sfere se koristi za merenje visokih napona (sferno iskrište). Kod njega se napon meri razmakom sfera pri kome dolazi do proboja vazduha. Na primer sa kuglama prečnika 1250 mm pri naponu od 320 kV do proboja dolazi na razmaku od 125 mm. To važi pri normalnom atmosferskom pritisku i normalnoj vlažnosti vazduha.

1.13. Dielektrici u elektrostatičkom polju

Za razliku od provodnika, dielektrici nemaju slobodnih naelektrisanja i kada se nađu u električnom polju oni ne provode struju. Njihovi atomi i molekuli imaju i pozitivna i negativna naelektrisanja ali ona su vezana. Postoje dve vrste dielektrika, *polarni* i *nepolarni*.

Kod *polarnih* dielektrika molekularne veze su takve da se centri pozitivnih i negativnih naelektrisanja ne poklapaju već postoji neko ekvivalentno rastojanje. Takvi molekuli i bez spoljašnjeg polja imaju neki *dipolni moment*. U odsustvu električnog polja oni su haotično raspoređeni tako da ne proizvode nikakvo električno dejstvo.

Izuzetak od ovoga su takozvani elektreti. To su materije koje su u rastopljenom stanju stavljeni u električno polje da bi se njihovi polarni molekuli uredili. U takvom stanju su ohlađeni tako da se dobila neka vrsta „stalnog magneta” za električno polje.

Kada se dielektrik unese u električno polje počinje usmeravanje dipolnih momenata i sve veći broj orijentisanih prema električnom polju.

Kod *nepolarnih* molekula ili atoma centri negativnog i pozitivnog naelektrisanja se poklapaju i u odsustvu električnog polja oni se ponašaju neutralno. Kada se unesu u električno polje pod njegovim dejstvom dolazi do pomeranja centara naelektrisanja koji se više ne poklapaju tako da se pojavljuju dipolni momenati i njihova orijentacija prema polju.

Za obe vrste dielektrika važi da kada se unesu u električno polje pojavljuju se uređeni dipoli sa svojim momentima. Dipolni moment je proizvod naelektrisanja (q) i njihovog rastojanja (d). Zbog orijentacije rastojanja ovaj proizvod je vektor.

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Proces formiranja dipolnih momenata u dielektriku pod dejstvom električnog polja naziva se *polarizacija dielektrika* (sl. 1.13-1). Na makroplanu važna je njihova gustina. Tako se definiše vektor polarizacije kao broj dipolnih momenata u jedinici zapremine:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{dV} \vec{p}}{\mathrm{d}V}$$

Po svojoj prirodi vektor polarizacije je površinska gustina naelektrisanja a jedinica u SI sistemu je C/m^2.

Za izotropne i linearne dielektrike vektor polarizacije proporcionalan je jačini električnog polja tako što je:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}$$

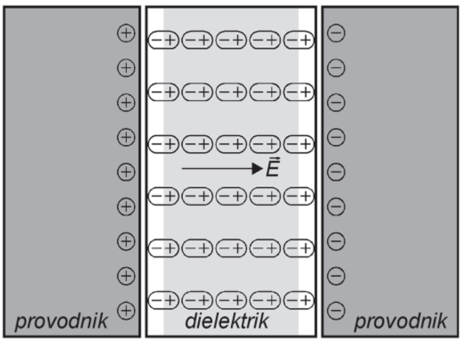
χ_E električna susceptibilnost

U unutrašnjosti dielektrika gustina pozitivnih i negativnih naelektrisanja je jednaka i ona se ponaša slično vakuumu. U površinskom sloju u zoni debljine *d* pojavljuje se višak naelektrisanja određenog znaka. Na ulasku polja u dielektrik pojavljuje se negativno naelektrisanje a na drugoj strani pozitivno.

Na taj način jačina električnog polja unutar dielektrika se smanjuje. Ugao pod kojim polje ulazi u dielektrik ne mora biti 90^0. Sa smanjenjem ovog ugla smanjuje se debljina ove zone i samim tim i intenzitet polarizacije. Polarizacija na površini stvara svoju gustinu naelektrisanja. Ovo su vezana naelektrisanja i njihova gustina potiče od normalne komponente vektora polarizacije u odnosu na ravan dielektrika:

$$\eta_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Zamislimo da se naelektrisano telo nalazi u dielektriku. Ako je naelektrisano telo naelektrisano pozitivnim naelektrisanjem linije polja će izlaziti iz ovog tela i ulaziti u dielektrik. To znači da je vektor normale površine dielektrika okrenut u površinu što odgovara uglu od 180^0 i naelektrisanje od polarizacije dielektrika će biti negativno. To je i logično jer će pozitivno naelektrisanje tela dipole u dielektriku orijentisati tako da uz telo budu negativna vezana naelektrisanja. Zbog ovoga gustina vezanih naelektrisanja u dielektriku je:



Sl. 1.13-1. Polarizacija dielektrika

$$\eta_p = -P = -\varepsilon_0 \chi_E E$$

Sa ovim jačina električnog polja u dielektriku je:

$$E = \frac{\eta + \eta_p}{\varepsilon_0} = \frac{\eta - P}{\varepsilon_0} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} - \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} - \chi_E E$$

Odnosno: $E = \dfrac{\eta}{\varepsilon_0(1+\chi_E)} = \dfrac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{\eta}{\varepsilon}$

ε_r relativna dielektrična konstanta dielektrika
ε dielektrična konstanta dielektrika

Za vazduh relativna dielektrična konstanta je praktično jedinica (ε_r=1,0006).

Za nepolarne dielektrike relativna dielektrična konstanta je ispod 10. Za polarne ona je od nekoliko desetina a postoje i specijalne keramike kod kojih je i više hiljada.

1.14. Kapacitivnost

Posmatrajmo dva provodna tela sa jednakim naelektrisanjima ali suprotnog znaka (na primer usled elektrostatičke indukcije). Za linearne sredine (samim tim i vakuum) razlika potencijala između njih je napon i on je proporcionalan naelektrisanju.

$$q = C(V_1 - V_2) = CU$$

Koeficijent proporcionalnosti naziva se *kapacitivnost*.

$$C = \frac{q}{U}$$

Jedinica za kapacitivnost je farad (F). Farad je velika kapacitivnost i koriste se manje jedinice kao što su μF, nF, pF itd. Elementi koji se odlikuju kapacitivnošću nazivaju se *kondenzatori*. Više detalja o njima sledi u narednoj tački ovog poglavlja.

U opštem slučaju kapacitivnost između dva tela u linearnoj ali nehomogenoj sredini može se izraziti u obliku:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\iint_S \varepsilon(r)\vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Ako je dielektrik između ploča nehomogen tako da mu se po dužini menjaju dielektrična propustljivost (ε_r) i poprečni presek, njegova kapacitivnost je:

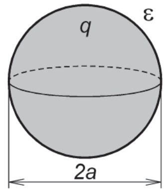
$$C = \frac{\varepsilon_0}{\int_0^d \frac{\mathrm{d}l}{\varepsilon_r S}}$$

Nehomogenost može da bude takva da se menja po površini. Tada je kapacitivnost:

$$C = \frac{1}{l} \iint_S \varepsilon_r(S) S \mathrm{d}S$$

Da bi se mogla izračunati kapacitivnost potrebno je da se poznaju zavisnosti poprečnog preseka i dielektrične propustljivosti (ε_r) duž dielektrika – od jedne do druge poče ($S=f_1(l)$, i ili po površini $\varepsilon_r=f_2(S)$).

Primer kondenzatora sa nehomogenim dielektrikom je kada su ploče delimično potopljene u tečnost tako da je jedan deo u vazduhu a drugi u tečnosti.



Sl. 1.14-1. Usamljena sfera

Primeri: *Kapacitivnost usamljene sfere*

Napon sfere (sl. 1.14-1) poluprečnika a, u odnosu na beskonačno udaljenu referentnu tačku u vakuumu je:

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Njena kapacitivnost je: $C = \dfrac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 a$

<u>Primeri:</u> Kapacitivnosti sfera poluprečnika a su:

a=1 cm, C=1,11 pF; a=1 dm, C=11,1 pF; a=1 m, C=111 pF

Planeta Zemlja (a=6378 km) je: $C_{\text{Zemlje}} \approx 710\ \mu\text{F}$.

Električno polje na površini sfere je: $E_{\max} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \dfrac{U}{a}$

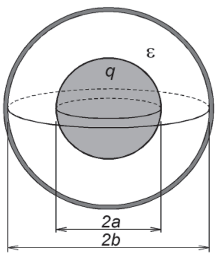
Kapacitivnost dve udaljene sfere

Za dve udaljene sfere kapacitivnost je približno: $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Kapacitivnost dve bliska sfere

Kod dve bliske naelektrisane sfere dolazi do međusobnog odslikavanja (ogledanja) naelektrisanja jedne sfere u drugoj i obrnuto. To se manifestuje kao zbir više različitih naelektrisanja postavljenih na različitim rastojanjima. Proračun te kapacitivnosti je dosta složen i neće se razmatrati.

Kapacitivnost sfernog kondenzatora



Sl. 1.14-2. Sferni kondenzator

Sferni kondenzator (sl. 1.14-2) čine dve koncentrične sfere. Kapacitivnost sfernog kondenzatora sa poluprečnicima unutrašnje (a) i spoljašnje (b) sfere i dielektrikom (ε) je:

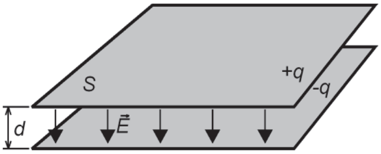
$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}$$

Usamljena sfera je specijalan slučaj sfernog kondenzatora kod koga je spoljašnja sfera mnogo većeg poluprečnika od unutrašnje ($b \gg a$).

Kapacitivnost pločastog kondenzatora

Dve ploče sa dielektrikom između njih (sl. 1.14-3) čine pločasti kondenzator. Ako je površina ploča S i razmak d kapacitivnost pločastog kondenzatora u vakuumu je:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

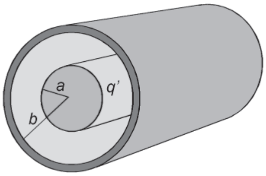


Sl. 1.14-3. Pločasti kondenzator

Ako je između homogen dielektrik sa relativnom dielektričnom konstantom ε_r, kapacitivnost je:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

Podužna kapacitivnost koaksijalnog voda



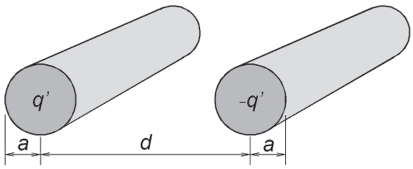
Sl. 1.14-1. Koaksijalni vod

Napon između provodnika koaksijalnog voda poluprečnika a i b sa dielektrikom (ε) je:

$$U = \frac{q'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

Podužna kapacitivnost je: $$c = C' = \frac{q'}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

Podužna kapacitivnost dvožičnog voda



Sl. 1.14-2. Dvožični vod

Napon između provodnika dvožičnog voda poluprečnika a i osnog razmaka d je:

$$U = \frac{q'}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

Podužna kapacitivnost dvožičnog voda je:

$$c(F/m) = C' = \frac{q'}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)} \approx \frac{0{,}278 \cdot 10^{-10}}{\ln(d/a)} = \frac{10^{-9}}{36 \ln(d/a)}$$

Ova kapacitivnost se odnosi na usamljen dvožični vod u prostoru. Za dvožični vod postavljen iznad zemlje mora se uzeti u obzir i njegovo odslikavanje u odnosu na zemlju. Sada se pojavljuju takozvani parcijalni kapaciteti ali nećemo ih analizirati.

Kod trofaznog trožičnog voda (dalekovoda) ne postoji povratni provodnik i podužna kapacitivnost je:

$$c(F/m) \approx \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}}{a}} \approx \frac{0{,}556 \cdot 10^{-10}}{\ln \frac{d_{S,G}}{a}} = \frac{10^{-9}}{18 \ln \frac{d_{S,G}}{a}}$$

$d_{S,G}$ srednje geometrijsko rastojanje provodnika

$d_{i,j}$ pojedinačna rastojanja između provodnika

Podužna kapacitivnost dalekovoda je c_{DV}=(8 ... 14) pF/m.

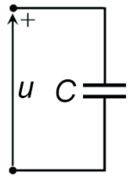
Podužna kapacitivnost kablova je c_{kabl}=(50 ... 400) pF/m.

Izraz važi za vod kod koga je osno rastojanje mnogo veće od prečnika provodnika ($d \gg 2a$). Ako ovaj uslov nije ispunjen (kablovi) mora se uzeti u obzir i međusobno odslikavanje provodnika i tada je podužna kapacitivnost:

$$c = C' = \frac{q'}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right)}$$

Razlika u odnosu na prethodni izraz od oko 1 % ima se kod odnosa $d \approx 7a$.

1.15. Kondenzatori



Sl. 1.15-1. Simbol kondenzatora

Kondenzatori su elementi (komponente) električnog kola koji se karakterišu kapacitivnošću. Oni nalaze široku primenu u praksi kako u energetici tako i u elektronici. Simbol kondenzatora u električnim šemama prikazan je na sl. 1.15-1.

Kondenzatori se prave tako što se dve tanke aluminijumske folije sa veoma tankim slojem međusobne izolacije (dielektrika) namotaju u rolnu i sa svake izvede priključak. Takvi kondenzatori se nazivaju blok kondenzatorima. Ovi kondenzatori nisu polarizovani i mogu da rade sa naizmeničnim naponima. Njihove kapacitivnosti se kreću u opsegu od pF do desetak μF. Njihovi naponi su od više desetina volti do više kV. Gabaritno mali blok kondenzatori se primenjuju u elektronici a najveće jedinice se koriste u energetici za popravku faktora snage, indukcionim uređajima itd. Kao dielektrik najčešće se koriste folije polipropilena, stirofleksa i slično.

Znatno veće kapacitivnosti postižu se sa elektrolitskim kondenzatorima (do više desetina hiljada μF). Njihovi naponi idu do oko 500 V. Njihov dielektrik je polarizovan tako da rade samo sa jednosmernim naponom. Koriste se u ispravljačkim stepenima elektronskih uređaja, za smanjenje valovitosti ispravljenog napona.

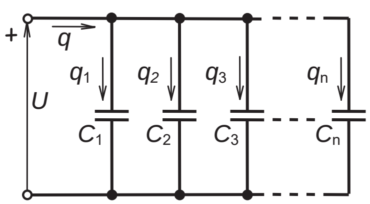
Postoje kondenzatori sa keramičkim dielektrikom (keramički kondenzatori). Njihov dielektrik je kondenzatorska keramika sa veoma velikom relativnom dielektričnom konstantom (ε_r iznosi i više hiljada). I oni su polarizovani i rade sa jednosmernim naponom.

U novije vreme razvojem nanotehnologije i materijala kao što je grafen razvijeni su superkondenzatori čije kapacitvnosti dostižu i više desetina hiljada, pa i preko 100000 F). Njihovi maksimalni naponi su do oko 2,7 V. I pored niskog napona njihove zapreminske gustine energije su više desetina puta veće od blok kondenzatora. Za rad sa višim naponima kondenzatori se vezuju na red.

Kondenzatori se mogu vezivati paralelno, redno i mešovito.

<u>Paralelna veza kondenzatora</u>

Kondenzatori (C_1, C_2, C_3, ... C_n) vezani paralelno (sl. 1.15-2) imaju isti napon i napuniće se količinama elektriciteta (q_1, q_2, q_3, ... q_n). Ukupna količina elektriciteta kojom su se napunili jednaka je zbiru pojedinačnih naelektrisanja:



Sl. 1.15-2. Paralelna veza kondenzatora

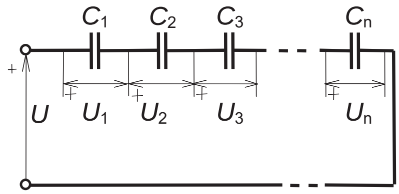
$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_n$$

Ako se ova količina elektriciteta podeli sa naponom dobija se ekvivalentna kapacitivnost

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_n}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots C_n$$

Kod paralelne veze ekvivalentna kapacitivnost je jednaka zbiru kapacitivnosti pojedinačnih kondenzatora.

Redna veza kondenzatora



Sl. 1.15-3. Redna veza kondenzatora

Kada su kondenzatori vezani redno (sl. 1.15-3) onda se kroz njih uspostavlja ista struja tako da se pune istom količinom elektriciteta. Ukupan napon redne veze jednak je zbiru napona pojedinačnih kondenzatora:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ..U_n$$

Ako se ovaj napon podeli sa količinom elektriciteta dobija se za ekvivalentnu kapacitivnost izraz:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + ..U_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Kod redne veze ekvivalentna kapacitivnost je manja od najmanje. Ova veza se primenjuje kada se radi sa naponom većim od napona pojedinačnih kondenzatora.

Mešovite veze kondenzatora

Mešovite veze su složenije. Njihova ekvivalentna kapacitivnost se može dobiti primenom pravila za rednu i paralelnu vezu, i pravilima za transfiguraciju zvezde u trougao i obrnuto.

1.16. Uopšteni Gausov zakon

Ranije opisani Gausov zakon odnosio se na vakuum. Posle ovih razmatranja može da se formuliše opštiji oblik ovog zakona koji važi za bilo koju sredinu. On se dobija ako se uzme u obzir postojanje vezanih naelektrisanja (q_p) na površini dielektrika. Sa ovim on postaje:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q+q_p}{\varepsilon_0}$$

Ako se za vezano naelektrisanje izrazi preko vektora polarizacije dobija se:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q+q_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q+q_p\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Posle sređivanja dobija se:

$$\oint\!\!\oint_S \varepsilon_0 \vec{E}(1+\chi_E)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint_S \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$

Gde je $\vec{D}$ vektor pomeraja i iznosi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Za linearnu sredinu vektor pomeraja je:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(1+\chi_E) = \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Po analogiji sa magnetnim poljem vektor $\vec{D}$ naziva se i *vektor električne indukcije*.
Sa vektorom električne indukcije Gausov zakon je:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$

Drugim rečima, fluks vektora električne indukcije ($\vec{D}$) kroz zatvorenu površinu u bilo kojoj sredini jednak je obuhvaćenom slobodnom naelektrisanju. Ako je ta sredina vakuum vektor polarizacije je nula pa se on svodi na ranije dat oblik.

Prema ovome vektor $\vec{D}$ predstavlja *gustinu električnog fluksa* i ima dimenziju površinske gustine naelektrisanja.

U diferencijalnom (lokalnom) obliku ova jednačina je:

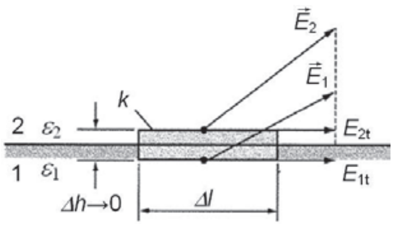
$$\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

ρ zapreminska gustina naelektrisanja

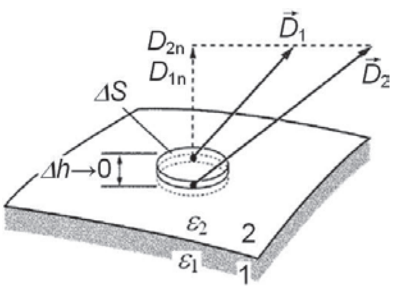
Ova jednakost važi u tački bilo koje sredine (vakum i dielektrik).

Granični uslovi i zakon prelamanja vektora električnog polja

Posmatrajmo graničnu površi između dve dielektrične sredine sa dielektričnim konstantama ε_1 i ε_2. Na graničnoj površi nema slobodnih naelektrisanja (ρ=0). Cirkulaciju vektora $\vec{E}$ po zatvorenoj konturi na granici dve različite sredine (sl. 1.16-1a) mora bini nula.



a)



b)

Sl. 1.16-1. Uslovi na graničnoj površini dve različite dielektrične sredine

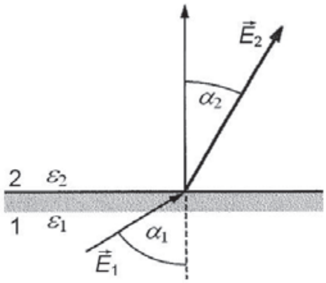
$$\oint_k \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Delta l} E_{1t} \mathrm{d}l - \int_{\Delta l} E_{2t} \mathrm{d}l = \int_{\Delta l} (E_{1t} - E_{2t}) \mathrm{d}l = 0$$

Cirkulaciju stvara samo tangencijalna komponenta jer je visina konture zanemarivo mala ($\Delta h \to 0$). Iz ovog uslova dobija se da su tangencijalne komponente električnog polja u obe sredine jednake ($E_{1t}=E_{2t}$).

Prema uopštenom Gausovom zakonu Fluks vektora $\vec{D}$ po zatvorenoj površini (sl. 1.16-1*b*), na granici dve sredine bez slobodnih naelektrisanja (ρ=0) je nula.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Delta l} D_{1n} \mathrm{d}S - \int_{\Delta S} D_{2n} \mathrm{d}S = \int_{\Delta S} (D_{1n} - D_{2n}) \mathrm{d}S = 0$$

Fluks vektora $\vec{D}$ stvara samo normalna komponenta na površinu. Iz ovog uslova sledi da su normalne komponente vektora polarizacije u obe sredine jednake ($D_{1n}=D_{2n}$). Za linearnu sredinu postoji konstantan odnos vektora



Sl. 1.16-2. Prelamanje linija električnog polja

električne polarizacije i jačine električnog polja. U tom slučaju može da se odredi odnosi tangensa uglova linija električnog polja za ove sredine i on je:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Ovi odnosi pokazuju kako se linije jačine električnog polja na granici između dve dielektrično različite sredine lome i oni predstavljaju *zakon prelamanja* (sl. 3.15-2) linija električnog polja.

1.17. Sile i energija u elektrostatičkom polju

Malo naelektrisano telo oko sebe stvara električno polje. Kada se u ovo polje unese drugo malo naelektrisao telo na njega deluje Kulonova sila.

Izračunavanje jačine polja i sile je jednostavno za male dimenzije tela u odnosu na rastojanja (tačkasta naelektrisanja). Kada njihove dimenzije postanu velike račun postaje složeniji. Opšti metod je takav da se oba tela podele na male delove. Sila na neki deo tela 2 je vektorski zbir sila svih manjih delova tela 1. Ukupna sila na telo 2 je zbir ovakvih sila na njegove manje delove. Za ovakav račun neophodno je poznavanje raspodele naelektrisanja na oba tela. To je upravo problem i ograničenje ovakvog metoda. Njegova primena se svodi na nekoliko karakterističnih primera gde je ta raspodela poznata. Dva karakteristična primera su sile na ravne ploče kondenzatora i sile između provodnika dvožičnog voda.

<u>Sila na ploče vazdušnog kondenzatora</u>

Za ploče vazdušnog kondenzatora naelektrisane površinskom gustinom elektriciteta (η), jačina električnog polja između njih je:

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}$$

Sila na ploče je:

$$F = qE = \frac{\eta^2 S}{2\varepsilon_0}$$

Sila po jedinici površine (pritisak) je:

$$P = \frac{F}{S} = qE = \frac{\eta^2}{2\varepsilon_0}$$

Izražen preko napona između ploča kondenzatora, pritisak (N/m^2) je:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{U^2}{d^2}$$

Sile između provodnika vazdušnog dvožičnog voda

Provodnici dvožičnog voda sa poluprečnikom provodnika a i osnim razmakom D, naelektrisani su podužnim naelektrisanjem q'.

Njihovo električno polje je radijalno u odnosu na ose provodnika i na udaljenosti drugog provodnika (d) iznosi:

$$E = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

Podužna sila na provodnik je : $F' = q'E = \dfrac{q'^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$

Izražena preko napona između provodnika ova sila je:

$$F' = q'E = \frac{q'^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{C'^2 U^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\pi\varepsilon_0 U^2}{2d\left(\ln\frac{d}{a}\right)^2}$$

Na primer podužna sila između provodnika dalekovoda 110 kV je oko 0,05 N/m. Za jačine polja koje se mogu postići (u vazduhu do oko 3 kV/mm) sile elektrostatičkog polja su veoma male (daleko manje od sila u magnetizmu).

Korišćenjem ovih sila mogle bi se konstruisati električne mašine (motori ili generatori) ali zbog malih sila, sa normalnim dimenzijama, ne bi se mogle postići neke značajnije snage.

Energija električnog polja

Rad koji je potreban da dva suprotna naelektrisanja razdvoje na rastojanje dl stvarajući pri tome napon među njima dU je:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l = qE\mathrm{d}l = q\mathrm{d}U = CU\mathrm{d}U$$

Dovođenjem naelektrisanja na takvo rastojanje ovaj rad je postao njihova potencijalna energija. Dva razdvojena naelektrisanja karakteriše kapacitivnost i sa njom energija je:

$$W_{\mathrm{el,polja}} = C\int U\mathrm{d}U = \frac{1}{2}CU^2$$

Ako se posmatra dovoljno mala zapremina u njoj je električno polje homogeno pa je njegova kapacitivnost:

$$C = \varepsilon\frac{S}{l}$$

Sa ovim energija je: $W_{\mathrm{el,polja}} = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{Sl}{l^2}U^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon VE^2$

Izražena preko veličina polja zapreminska gustina energije električnog polja je:

$$w_{\mathrm{el,polja}} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$$

Ovaj izraz pokazuje da je energija smeštena u prostoru u kome postoji električno polje. Izraz je izveden za linearnu sredinu.

Ako energija nije podjednako raspodeljena u prostoru dielektrika ukupna energije je:

$$W_{\mathrm{el.polja}} = \iiint\limits_V w_{\mathrm{el.polja}} \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

<u>Izračunavanje sile i momenta pomoću energije</u>

Energija sadržana u električnom polju je rezultat izvršenog rada. Ako se stvore uslovi ova energija takođe može da izvrši rad i da nestane.

Pri vršenju rada energija polja se smanjuje. Priraštaj energije polja ($\mathrm{d}W_{polja}$) je negativan a sila koja se pri tome razvija i vrši rad na diferencijalnom putu dx je:

$$F_{\mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{Polje}}}{\mathrm{d}x}$$

Ako je ta struktura (na primer kondenzator) priključena na izvor napajanja smanjenje energije se nadoknađuje iz izvora i sila u ovom slučaju je.

$$F_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{Izvor}}}{\mathrm{d}x}$$

Obe ove sile su jednake i po intenzitetu i po smeru samo se razlikuje to odakle se uzima energija za vršenje rada.

Električna struktura sa razdvojenim naelektrisanjima je kondenzator. Kondenzator može da vrši rad na primer tako što se menja razmak između ploča ili površina (promenljivi kondenzatori). Za izračunavanje sile prvo treba izračunati kapacitivnost a zatim akumulisanu energiju. Dalje treba naći prvi izvod po zamišljenom pomeraju (na primer po razmaku ploča ili površini ploča).

Ako se radi o promenljivom kondenzatoru kod koga se ploče zakreću za neki ugao (φ) izvod treba tražiti po tom uglu i tada se umesto sile dobija moment sile:

$$M_{\varphi} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\varphi}$$

Ovde se radi o zamišljenim pomeranjima pa se ovaj metod računanja sile naziva i *metod virtualnih pomeranja*. To je univerzalni metod koji ima široku primenu u mehanici i fizici uopšte.

1.18. Kretanje naelektrisane čestice u elektrostatičkom polju

U elektrostatičkom polju na naelektrisanu česticu deluje Kulonova sila. Ako nema drugih sila (na primer sile trenja) ili sudara sa drrugim česticama, Kulonova sila će da ubrzava kretanje naelektrisane čestice i da joj povećava kinetičku energiju.

Kulonova sila na naelektrisanje je: $F_Q = qE$

Ova sila naelektrisanoj čestici mase *m* daje ubrzanje: $a = \frac{F_Q}{m} = \frac{qE}{m}$

Rad Kulonove F_Q sile na putu Δl je: $\Delta A = F_Q \Delta l = qE\Delta l = q\Delta U$

Za početnu brzinu čestice v_0 početna kinetička energija je:

$$E_{\mathrm{Kin},0} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Plelaskom puta Δl kinetička energija se povećala za uloženi rad i iznosi:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + q\Delta U$$

Posle ovoga brzina čestice je: $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta U}{m}}$

Ako je početna brzina jednaka nuli, naelektrisana čestica dostiže brzinu:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta U}{m}}$$

Na primer elektron mase (m_e=9,1·10^{-31} kg, e=1,6·10^{-19} C) prolaskom kroz polje sa razlikom potencijala od ΔU=1V poveća brzinu od nulte na oko v=593 km/s. Prema ovome da bi elektron dostigao brzinu svetlosti potreban je napon od oko 556 kV. Međutim pri velikim brzinama dolaze do izražaja relativistički efekti, u ovom slučaju povećanje mase elektrona, tako da se elektron ne može dostići brzinu svetlosti.

Jedna od primena ovog dejstva je kod akceleratora za ubrzanje naelektrisanih čestica (linearni akcelerator). Postoje akceleratori koji kombinuju dejstvo električnog i magnetnog polja (ciklotron).

Pogodnim oblikom elektroda kojima se stvara elektrostatičko polje može da se utiče na pravac i smer kretanja naelektrisane čestice. Primer za to su katodne cevi osciloskopa gde se upravljanje elektronskim mlazom vrši promenljivim električnim poljem (horizontalno i vertikalno skretanje mlaza.

Jedan posebno važan slučaj kretanja naelektrisanja je usmereno kretanje slobodnih naelektrisanja u provodniku koji se naziva električna struja. To više nije elektrostatika već nova oblast elektrotehnike koja razmatra električna kola.

Upravo će to biti predmet razmatranja narednog poglavlja.