Зоран Пуцановић

Математика 1

За студенте Грађевинског факултета

Линеарна алгебра

Аналитичка геометрија

Увод у математичку анализу

АКАДЕМСКА МИСАО
Универзитет у Београду – Грађевински факултет
Београд, 2021.

Зоран Пуцановић

Математика 1

За студенте Грађевинског факултета

Рецензенти
Проф. др Александар Липковски
Проф. др Љубомир Чукић

Издавачи
Академска мисао, Београд
Универзитет у Београду – Грађевински факултет

Наставно-научно веће Грађевинског факултета Универзитета у Београду одобрило је уџбеник за штампу на седници одржаној 24.06.2021. године.

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж
300 примерака

ISBN 978-86-7466-892-4

Место и година издања
Београд, 2021.

Предговор

Књига пред вама резултат је вишегодишњих предавања студентима Грађевинског факултета Универзитета у Београду, којима је првенствено и намењена. Истовремено, овај уџбеник настао је и услед нове акредитације, која је условила значајне измене у програмима математичких предмета. Писана је према важећем програму предмета Математика 1 који се слуша у првом семестру студија.

О значају математике као моћног и незаменљивог алата за студенте техничких наука сувишно је говорити. Заправо, већи део материје која се изучава током студија на неки начин инспирисан је математичким концептима и идејама примењеним на практичне проблеме. Са друге стране, добро је позната бојазан и нелагодност студента који се по први пут сусреће са строгим излагањем теоријске природе на коме почива математика као наука. Први сусрет са теоријским приступом математици природно ће код читаоца произвести збуњеност и неретко ће се запитати да ли је и због чега све то потребно.

Пишући уџбеник, имао сам пре свега у виду јасну потребу за превазилажењем овог несклада, што је уједно још један од мотива настанка ове књиге. Свестан могућег ризика да се овај курс схвати као гомила непотребних и тешко разумљивих теорема и формула, трудио сам се да читалац учење математике прихвати као изазов. Иза сваке важније теореме по правилу следи задатак или пример као њена илустрација. Већина тврђења детаљно је доказана, изузев оних чији су докази компликованији, као и оних чији су докази лакши или слични раније изведеним, те су као такви остављени читаоцу за вежбу. Велики број слика налази се на свим оним местима на којима графика може допринети бољем разумевању изложеног текста.

Да би читаоци лакше усвојили презентовано градиво и притом се заинтересовали за садржај предмета, следе одређена упутства и савети за читање књиге за које сматрам да су корисни. Наиме, логика математике је јасна, концизна и прецизна - не допушта двосмислености и произвољна тумачења. Стога се сви битни појмови строго дефинишу, при чему су дозвољени извесни изузеци, као што је на пример појам скупа који се уводи аксиомама теорије скупова. Након дефинисања фундаменталних појмова, математички текст се даље излаже кроз тврђења (ставове), леме (помоћна тврђења), теореме (посебно важна тврђења) и њихове последице. Да би добијени резултати били валидни, најпре их морамо доказати. У доказима користимо дефиниције и претходно доказана тврђења. Укратко, ово су правила игре. Јасно сагледавање ових правила представља први корак ка разумевању математичких принципа и успешном спремању испита.

Свакако најсигурнији начин за стицање анимозитета према математици је читање са прескакањем и учење напамет - рецитовање. Посебну пажњу треба усмерити на ову замку коју је лако избећи. Рецепт је једноставан - не настављајте са читањем све док правилно не разумете дефиницију одређеног појма. Осмислите сами што једноставнији пример који илуструје сваки аспект нове дефиниције.

Пре читања доказа неког тврђења, уверите се најпре да сте правилно разумели сам исказ. При томе важе исти принципи - конструишите примере који ће потврдити исказ. Следећи овај једноставан принцип, савладавање градива постаће лако, а улазак у свет математике занимљив и изазован. Поред тога, термин 'доказ' теореме може код студената често произвести асоцијације на компликоване токове мисли и одбојност ка покушају да се исти савлада. Како је ова књига писана пре свега за студенте технике, у рукопису који следи не претендује се на строгост математичког излагања и стога су изостављени тежи докази. Дугогодишње искуство у настави ми говори да је уместо доказа важније разумети значење неког тврђења, његову примену и последице.

Након уводне главе, књига је подељена на три целине предвиђене програмом, и то: линеарну алгебру, аналитичку геометрију и увод у математичку анализу. На крају сваке главе налазе се вежбања помоћу којих читалац може тестирати усвојено знање. Вежбања су оријентисана ка конкретним проверама и садрже разнолике задатке, од најједноставнијих примера којима се контролише разумевање основних појмова, до оних компликованијих који захтевају размишљање и повезивање градива. Уколико дате тачне одговоре на бар 50% постављених питања - задатака, можете сматрати да сте успешно савладали градиво предвиђено одређеном главом.

У уводној глави, која се углавном састоји од средњошколског градива са извесним допунама, разматра се целокупан материјал који је неопходан за неометано читање и разумевање даљег текста. Читаоцу са слабијим математичким предзнањем саветује се пажљиво читање овог садржаја.

Тема друге главе књиге је линеарна алгебра, област са широким спектром примена у техници. Изучавајући ову математичку област читалац ће након усвајања кључних појмова детаљно упознати основне структуре линеарне алгебре - векторске просторе. Лимитираност обимом предмета није ми дозволила да посветим онолико простора овој теми колика је била првобитна намера. Ово се пре свега односи на практичне примене, за које се искрено надам да ће наћи своје место у неком будућем издању књиге. Ипак, заинтересовани читалац може надоградити своје знање даљим коришћењем неких од предложених књига за које су дате референце у попису литературе.

Трећа глава посвећена је аналитичкој геометрији и представља природан наставак линеарне алгебре. Праве, равни и површи у простору природно су окружење будућег инжењера грађевине. Нагињање ка визуелизацији и пракси, допринеће томе да неки читаоци аналитичку геометрију доживе као омиљени део овог курса.

Кроз увод у математичку анализу традиционално се изучавају бројни низови и нека фундаментална својства реалних функција једне променљиве, пре свега непрекидност и диференцијабилност. Садржај ове главе поставља темеље математичког образовања студената технике. Међутим, по неписаном правилу, студенти најтеже усвајају градиво заступљено у четвртој глави. Диференцијални рачун задаје главобоље многим, па и најбољим студентима. У великој мери разлог лежи у неразумевању појма граничног процеса на коме се заснива математичка анализа, као и специфичностима '$\varepsilon - \delta$' језика, којим се излаже ова материја. Стога сам посебну пажњу посветио самој дефиницији лимеса низа и функције. Када читалац савлада ове појмове, али тако да разуме улогу и значење сваког симбола, даље излагање постаће разумљиво и логично.

Осетљивост на грешке саставни је део писања уџбеника. Зато се унапред захваљујем читаоцима који ми укажу на грешке у тексту, ма којег карактера оне биле. Такође се захваљујем колеги др Марку Пешовићу на пажљивом читању појединих делова текста и корисним сугестијама, као и колегиници др Марији Обрадовић на помоћи при изради тродимензионалних слика површи другог реда.

Посебну захвалност дугујем рецензентима ове књиге, мојим уваженим колегама, др Александру Липковском и др Љубомиру Чукићу. Њихово пажљиво читање рукописа произвело је низ коментара и сугестија који су ми били од велике помоћи приликом отклањања грешака и значајно допринели да ова књига поприми свој коначан облик.

У Београду, 8. септембра 2021. године

Зоран Пуцановић
pucanovic@grf.bg.ac.rs

Садржај:

Глава 1

Увод

Уводна глава је кратак преглед средњошколског градива уз извесне допуне и са посебним освртом на основне математичке појмове, као што су елементи математичке логике, појам скупа, појмови релације и функције, основни скупови бројева и други појмови неопходни за разумевање даљег текста. Обраду ових тема сузићемо само на оне делове потребне за садржај овог предмета не претендујући на строгост излагања.

Иако се овде бавимо већ познатим садржајем, читаоцима са слабијим предзнањем саветује се пажљиво читање ове главе, будући да је неопходна за добро разумевање основних математичких концепата и самог језика математике.

1.1 Елементи математичке логике

Даћемо најпре кратак подсетник основних појмова исказног и предикатског рачуна. Термин *исказ* односи се на реченицу којој се може доделити истинитосна вредност $\top$ - тачно или $\perp$ - нетачно. Посматрајмо на пример следеће реченице:

p: Постоји природан број дељив бројем 3.

q: Сваки природан број дељив је бројем 3.

r: Математика је занимљива наука!

Реченице p и q су искази, при чему је p тачан а q нетачан исказ. За разлику од њих, реченица r није исказ будући да зависи од субјективног мишљења.

Исказна логика бави се само исказима и правилима доношења логичких закључака на основу датих исказа.

Исказе обично означавамо малим латиничним или малим грчким словима. Од датих исказа можемо формирати сложеније исказе применом негације која је унарна операција, што значи да зависи од једног аргумента, или бинарних операција које зависе од два аргумента: конјункције, дисјункције, импликације и еквиваленције. Ове операције дефинисане су на следећи начин:

Негација исказа p, у ознаци $\neg p$ („није p") је исказ који је тачан само ако је p нетачан.

Конјункција исказа p и q, у ознаци $p \wedge q$ („p и q") је исказ који је тачан само ако су p и q тачни, иначе је нетачан.

Дисјункција исказа p и q, у ознаци $p \vee q$ („p или q”) је исказ који је нетачан само ако су p и q нетачни, иначе је тачан.

Импликација исказа p и q, у ознаци $p \implies q$ („p повлачи q”, „из p следи q”, „ако p, онда q”, „p је довољан за q”, „q је потребан за p”) је исказ који је нетачан само ако је p тачан и q нетачан исказ. У осталим случајевима је тачан.

Еквиваленција исказа p и q, у ознаци $p \iff q$ („p еквивалентно са q”, „p ако и само ако q”, „p акко q”) је исказ који је тачан ако су оба исказа тачна или оба исказа нетачна, иначе је нетачан.

Симболе $\top$ и $\perp$ (некад се због боље прегледности користе ознаке 1 и 0) зовемо *логичким константама*, а скуп симбола $\{\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff\}$ *основним логичким операцијама*, које се могу дати и прегледније помоћу следећих таблица:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$	$p \iff q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Приоритет логичких операција је следећи: најстарија по приоритету је операција $\neg$, средње (и равноправне) су операције $\wedge$ и $\vee$, док су најмањег приоритета операције $\implies$ и $\iff$. Наравно, приоритет се може променити увођењем заграда.

Следећим правилом дефинише се појам *исказне формуле*.

1°) Логичке константе и исказна слова су исказне формуле.

2°) Ако су P и Q исказне формуле, онда су $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ и $P \iff Q$ исказне формуле.

3°) Све исказне формуле добијају се само коначном применом правила 1°) и 2°).

Основна карактеристика исказне формуле је да њена тачност зависи само од тачности исказних слова која учествују у њој. Од посебног значаја су исказне формуле које су тачне за све могуће вредности исказних слова. Таква исказна формула P зове се *таутологија*, у ознаци $\models P$. Насупрот томе, исказна формула P која је увек нетачна зове се *контрадикција*. Неке уобичајене ознаке за контрадикцију су ※ или ↯.

Има више начина да покажемо да је нека исказна формула таутологија. Један од њих, са којим је читалац већ упознат, је провера истинитосних таблица. Поред тога користи се и метод дискусије по слову, метод свођења на апсурд, метод таблоа, итд. Наводимо неке важније таутологије:

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \;\; p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ — Закони комутативности
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \; \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ — Де Моргановиi[1] закони

[1] Augustus De Morgan (1806 – 1871), британски математичар.