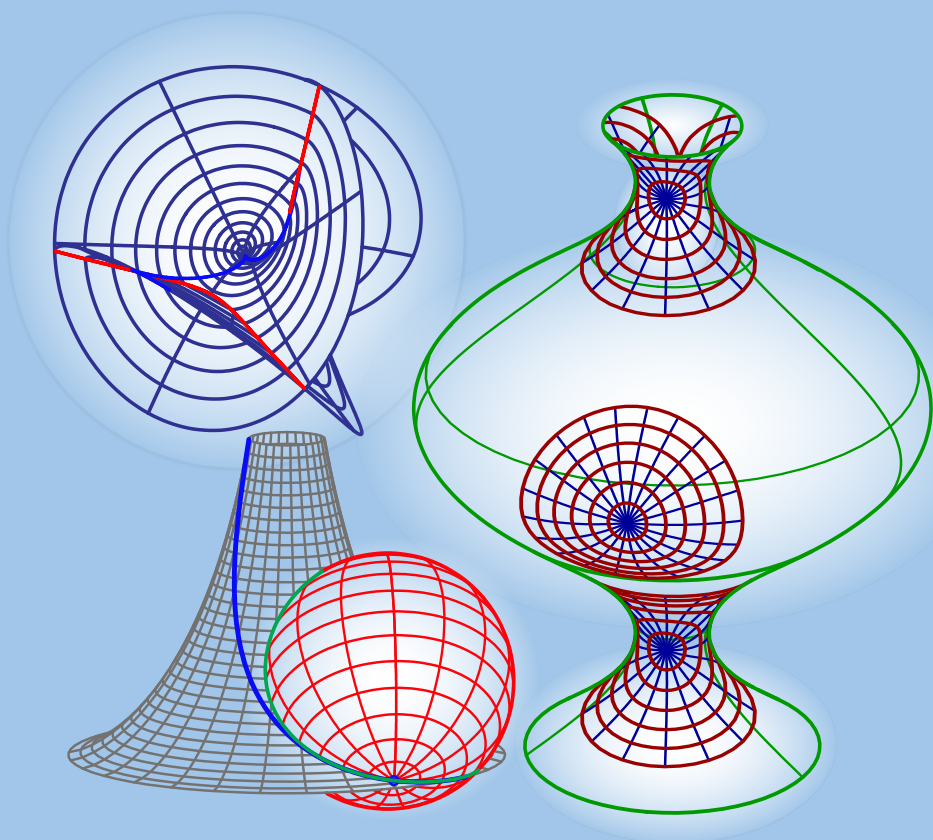


Ć. Dolićanin, E. Malkowsky, V. Veličković

# DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA I NJENA VIZUELIZACIJA



DRŽAVNI UNIVERZITET U NOVOM PAZARU  
AKADEMSKA MISAO

# *Diferencijalna geometrija i njena vizuelizacija*

---

Odlukom Matičnog odbora za matematiku, kompjuterske nauke i mehaniku Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije od 21.06.2021. ova knjiga je kategorisana kao monografija vodećeg nacionalnog značaja M41

---

Ćemal Dolićanin

Eberhard Malkowsky Vesna Veličković

# **DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA I NJENA VIZUELIZACIJA**

Državni univerzitet u Novom Pazaru

Akadska misao

Beograd, 2021.

Ćemal Dolićanin • Eberhard Malkowsky • Vesna Veličković

# DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA I NJENA VIZUELIZACIJA

## *Recenzenti*

prof. dr Vladimir Rakočević, redovni profesor PMF-a u Nišu i dopisni član SANU  
prof. dr Neda Bokan, redovni profesor u penziji Matematičkog fakulteta Univerziteta u  
Beogradu

prof. dr Ljubica Velimirović, redovni profesor PMF-a u Nišu

## *Lektor*

Snežana Krstić Tomić

## *Izdavači*

Državni univerzitet u Novom Pazaru, Novi Pazar  
Akademska misao, Beograd

## *Za izdavače*

prof. dr Miladin Kostić, rektor  
Marko Vujadinović, dipl. inž. elektr.

## *Štampa*

Akademska misao, Beograd

## *Tiraž*

100 primeraka

ISBN 978-86-81506-09-7

---

Odlukom rektora Državnog univerziteta u Novom Pazaru prof. dr Miladina Kostića br. 854/21 od 15.3.2021. godine, rukopis je odobren za štampu kao monografija.

---

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige – u celini ili u delovima – nije dozvoljeno bez prethodne izričite saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

---

---

# Sadržaj

Predgovor	vii
Spisak slika	ix
Uvod	1
<b>1 Krive u trodimenzionom euklidskom prostoru</b>	<b>5</b>
1.1 Tačke i vektori . . . . .	5
1.2 Vektorske funkcije realne promenljive . . . . .	12
1.3 Opšti koncept krivih . . . . .	15
1.4 Neki karakteristični primeri ravnih krivih . . . . .	20
1.5 Dužina luka krive . . . . .	33
1.6 Vektori triedra krive . . . . .	42
1.7 Freneove formule . . . . .	49
1.8 Geometrijski značaj krivine i torzije . . . . .	54
1.9 Oskulatorni krugovi i sfere . . . . .	57
1.10 Involute i evolute . . . . .	63
1.11 Fundamentalna teorema krivih . . . . .	72
1.12 Linije konstantnog nagiba . . . . .	76
1.13 Sferne slike krive . . . . .	89
<b>2 Površ i u trodimenzionom euklidskom prostoru</b>	<b>93</b>
2.1 Površ i krive na površima . . . . .	93
2.2 Tangentne ravni i vektori normala površi . . . . .	100
2.3 Dužina luka, uglovi i Gausovi prvi fundamentalni koeficijenti . . . . .	102
2.4 Krivina krivih na površima, geodezijska i normalna krivina . . . . .	114
2.5 Normalna, glavne, Gausova i srednja krivina . . . . .	122
2.6 Oblik površi u okolini tačke . . . . .	159
2.7 Dupinova indikatrisa . . . . .	167
2.8 Linije krivine i asimptotske linije . . . . .	169
2.9 Trostruki ortogonalni sistemi . . . . .	189
2.10 Vajngartenove jednačine . . . . .	195
<b>3 Unutrašnja geometrija površi</b>	<b>209</b>
3.1 Kristofelovi simboli . . . . .	209
3.2 Geodezijske linije . . . . .	224
3.3 Geodezijske linije na površima sa ortogonalnim parametrima . . . . .	238
3.4 Geodezijske linije na rotacionim površima . . . . .	242
3.5 Minimalno svojstvo geodezijskih linija . . . . .	248

3.6	Ortogonalni i geodezijski parametri . . . . .	253
3.7	Levi-Čivita paralelizam . . . . .	265
3.8	Teorema Egregium . . . . .	271
3.9	Preslikavanja između površi . . . . .	274
3.10	Gaus–Boneova teorema . . . . .	297
3.11	Minimalne površi . . . . .	300
	<b>Literatura</b>	<b>317</b>
	<b>Indeks pojmova</b>	<b>327</b>

---

# Predgovor

Knjiga *Diferencijalna geometrija i njena vizuelizacija* nastala je kao rezultat višegodišnjeg rada autora u oblastima diferencijalne geometrije i vizuelizacije matematike. Ona sadrži teme iz lokalne teorije krivih i površi u trodimenzionom euklidskom prostoru.

Pored studenata koji u nastavnom planu imaju predmet *Diferencijalna geometrija*, ova knjiga je namenjena i svima koji se sa segmentima ovog gradiva sreću ne samo na osnovnim i master akademskim, već i na doktorskim studijama, kao i nastavnicima koji predaju delove ovakvog programa na svim nivoima studija. Zbog toga je koncipirana kao monografija, sa idejom da sveobuhvatno izloži gradivo ove oblasti i približi ga čitaocima pomoću vizuelizacija.

Autori smatraju da vizuelno predstavljanje obrađenih tema u velikoj meri olakšava razumevanje koncepata i rezultata iz diferencijalne geometrije. Zbog toga je u knjigu uključen veliki broj grafičkih prikaza obrađenih tema, kreiranih pomoću softverskog paketa *MV-Graphics* koji su razvili Vesna Veličković i Eberhard Malkowsky. Više informacija o ovom softveru zainteresovani čitaoci mogu naći u odgovarajućim referencama u spisku literature.

Preduslov za čitanje ove knjige je solidno znanje matematičke analize i analitičke geometrije. Podsećanja radi, najvažniji rezultati iz ovih oblasti navedeni su u poglavlju 1.2.

Knjiga se sastoji iz tri glave sa ukupno 34 poglavlja. Sadrži listu slika, 49 detaljno urađena primera, 95 vizuelizacija, indeks pojmova i proširenu listu referenci za dalja istraživanja, uključujući udžbenike, monografije i naučne radove, kao i odabrane doktorske disertacije i master radove.

Glava 1 proučava lokalna geometrijska svojstva krivih u trodimenzionom euklidskom prostoru  $\mathbb{E}^3$ . Teme od posebnog interesa su parametarske reprezentacije krivih, dužina luka krive kao njen prirodni parametar, veliki broj primera ravnih krivih i geometrijski principi njihovih konstrukcija, vektori triedra krivih, Freneove formule, krivina i torzija krive i njihov geometrijski značaj, karakteristični oblik krive u okolini proizvoljne tačke, oskulatorni krugovi i sfere, involute i evolute krive, fundamentalna teorema krivih i prirodne ili unutrašnje jednačine krivih, linije konstantnog nagiba i na kraju sferne slike krivih.

Glava 2 se bavi lokalnom diferencijalnom geometrijom površi u trodimenzionom euklidskom prostoru  $\mathbb{E}^3$ , što znači da se proučava geometrijski oblik površi u okolini proizvoljne tačke. Najvažniji pojmovi koji proizilaze iz ovog zadatka su normalna, glavna, Gausova i srednja krivina. Ostale važne teme su krive na površima, tangentne ravni i vektori normala površi, prvi i drugi fundamentalni koeficijenti, Menijeova teorema, glavni pravci, Ojlerova formula, lokalni oblik površi i Dupinova indikatriisa, linije krivine i asimptotske linije, trostruki ortogonalni sistemi i Gausove i Vajngartenove jednačine.

Glava 3 proučava unutrašnju geometriju površi, odnosno geometrijska svojstva površi koja zavise samo od mera na samoj površi, konkretno od prvih fundamentalnih koeficijenata i njihovih izvoda. Najvažnije teme u ovoj glavi su Kristofelovi simboli prve i druge vrste i geodezijska krivina, Liuvilova teorema, geodezijske linije na površima sa ortogonalnim parametrima i na rotacionim površima, minimalno svojstvo geodezijskih linija, ortogonalni i geodezijski parametri, geodezijske paralelne i geodezijske polarne koordinate,



Levi–Čivita paralelizam, Gausove i Kodaci–Majnardijeve formule za parcijalne izvode, teorema Egregium, konformna, izometrijska i preslikavanja površi koja čuvaju površine, Gaus–Boneova teorema, minimalne površi i Vajerštrasove formule.

Najsrdajnije se zahvaljujemo recenzentima prof. Vladimiru Rakočeviću, dopisnom članu SANU i profesorima Nedi Bokan i Ljubici Velimirović koji su svojim primedbama i sugestijama doprineli unapređenju kvaliteta ove knjige. Takođe se zahvaljujemo lektoru Snežani Krstić Tomić na rešavanju jezičkih nedoumica u ovom tekstu.

Ćemal Dolićanin  
Eberhard Malkowsky  
Vesna Veličković

Novi Pazar,  
Beograd,  
Niš,

mart, 2021.

---

# Spisak slika

1.1	Euklidsko rastojanje tačaka $P$ i $Q$ i dužina vektora $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$ . . . . .	6
1.2	Vektor i vektor položaja tačke . . . . .	7
1.3	Dijagonale paralelograma . . . . .	8
1.4	Visine trougla . . . . .	8
1.5	Ugao između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ i projekcija $\vec{y}$ na $\vec{x}$ . . . . .	9
1.6	Rastojanje tačke od ravni . . . . .	11
1.7	Površina paralelograma . . . . .	12
1.8	Parametarska reprezentacija krive . . . . .	16
1.9	Heliks . . . . .	16
1.10	Nejlova parabola . . . . .	17
1.11	Lanac koji slobodno visi i parametarska reprezentacija lančanice . . . . .	18
1.12	Lančanice (levo) i lančanica $\gamma$ i kvadratna parabola $\gamma^*$ (desno) . . . . .	20
1.13	Konstrukcija (levo) i familije serpentina (desno) . . . . .	21
1.14	Konstrukcija (levo) i familije versijera (desno) . . . . .	22
1.15	Konstrukcija Dioklesove kisoide (levo) i strofoide (desno) . . . . .	23
1.16	Familije Dioklesovih kisoida i strofoida . . . . .	24
1.17	Konstrukcija (levo) i familije Maklorenovih trisektrisa (desno) . . . . .	24
1.18	Konstrukcija Nikomedesovog konkoida (levo) i Paskalovog puža (desno) . . . . .	26
1.19	Familije Nikomedesovih konkoida . . . . .	26
1.20	Familije Paskalovih puževa . . . . .	27
1.21	Konstrukcija (levo) i familija $\kappa$ -krivih (desno) . . . . .	27
1.22	Konstrukcija Kasinijeve krive . . . . .	29
1.23	Familije Kasinijevih krivih . . . . .	29
1.24	Konstrukcija (levo) i familija rozeta (desno) . . . . .	30
1.25	Konstrukcija (levo) i familija linija dvostrukog jajeta (desno) . . . . .	31
1.26	Konstrukcija (levo) i familija astroida (desno) . . . . .	32
1.27	Familija astroida i njihove ortogonalne trajektorije . . . . .	33
1.28	Lančanica sa parametrima $t$ (levo) i $s$ (desno) . . . . .	34
1.29	Lanci koji vise imaju jednaku dužinu . . . . .	37
1.30	Konstrukcija obične cikloide . . . . .	38
1.31	Familije običnih cikloida . . . . .	38
1.32	Konstrukcija (levo) i familija epicikloida (desno) . . . . .	39
1.33	Familije hipocikloida (levo) i neke specijalne hipocikloide (desno) . . . . .	41
1.34	Konstrukcija (levo) i familija traktriksa (desno) . . . . .	43
1.35	Vektori tangenti i vektori krivina lančanica (levo) i traktriksa (desno) . . . . .	45
1.36	Vektori triedra heliksa . . . . .	47
1.37	Vektori triedra krive iz vizuelizacije 1.6.8 . . . . .	48
1.38	Epicikloide i njihovi vektori krivina . . . . .	53
1.39	Torzija je mera odstupanja krive od ravni . . . . .	55
1.40	Oskulatorna, normalna i rektifikaciona ravan heliksa . . . . .	56

1.41	Aproksimacije heliksa u njenoj oskulatornoj, normalnoj i rektifikacionoj ravni . . . . .	57
1.42	Elipsa sa oskulatornim krugovima i centrima krivine . . . . .	58
1.43	Oskulatorni krugovi kao aproksimacije drugog reda . . . . .	59
1.44	Oskulatorni krug u tački krive iz vizuelizacije 1.9.3 . . . . .	60
1.45	Kriva, kriva njenih centara krivine i oskulatorna ravan, krug i sfera u istoj tački . . . . .	60
1.46	Heliks, oskulatorna ravan, krug i sfera i kriva centara oskulatornih sfera . . . . .	62
1.47	Oskulatorna sfera u nekoj tački krive $\gamma$ iz vizuelizacije 1.9.7 . . . . .	63
1.48	Oskulatorna sfera u nekoj tački krive $\gamma$ iz vizuelizacije 1.9.7 . . . . .	63
1.49	Tangentna površ (levo) i definicija involute (desno) . . . . .	64
1.50	Involuta u tangentnoj površi krive . . . . .	64
1.51	Involute krive na sferi (levo) i na katenoidu (desno) . . . . .	65
1.52	Preseci tangenti na heliks sa ravnima ortogonalnih na njegovu osu . . . . .	66
1.53	Definicija involute ravni . . . . .	67
1.54	Involute ravni heliksa . . . . .	69
1.55	Involute ravni krive na katenoidu . . . . .	70
1.56	Evolute krive na katenoidu . . . . .	70
1.57	Evoluta lančаницe . . . . .	71
1.58	Evolute heliksa . . . . .	72
1.59	Sferne krive . . . . .	76
1.60	Linije konstantnog nagiba date krivine . . . . .	77
1.61	Linije konstantnog nagiba na konusu . . . . .	80
1.62	Konstantan ugao između linije konstantnog nagiba $\gamma$ i pravca $\vec{u}$ . . . . .	82
1.63	Linije konstantnog nagiba . . . . .	83
1.64	Linije konstantnog nagiba na sferi (levo) i katenoidu (desno) . . . . .	83
1.65	Kriva krivine $\kappa(s) = s$ , odnosno $\phi(s) = s^2/2$ . Klotoid . . . . .	84
1.66	Klotoidi (levo) i logaritamске spirale (desno) . . . . .	85
1.67	Ortogonalna projekcija linije konstantnog nagiba na paraboloidu . . . . .	87
1.68	Ortogonalna projekcija linije konstantnog nagiba na sferi . . . . .	88
1.69	Sferne slike vektora tangenti, normala i binormala krive $\gamma$ . . . . .	90
1.70	Sferne slike heliksa . . . . .	90
1.71	Sferne slike vektora tangenti linija konstantnog nagiba na katenoidu . . . . .	91
2.1	Krive u svojoj parametarskoj ravni (levo) i na površi (desno) . . . . .	94
2.2	Parametarske linije na površi . . . . .	95
2.3	Polarne koordinate u ravni (levo); $x^1x^2$ -ravan sa polarnim koordinatama kao parametrima (desno) . . . . .	96
2.4	Kriva u ravni sa različitim parametarskim reprezentacijama . . . . .	97
2.5	Polusfere iz vizuelizacije 2.1.7 (a) i (b) . . . . .	98
2.6	Sfera sa sfernim parametrima (levo) i parametrizacija iz vizuelizacije 2.1.7 (c) (desno) . . . . .	99
2.7	Tangentne ravni i vektori normala površi . . . . .	100
2.8	Generisanje rotacione površi . . . . .	105
2.9	Generisanje ravni . . . . .	106
2.10	Generisanje kružnog cilindra . . . . .	106
2.11	Generisanje kružnog konusa . . . . .	107
2.12	Generisanje sfere . . . . .	107
2.13	Generisanje torusa . . . . .	108
2.14	Generisanje katenoida . . . . .	108
2.15	Logaritamска spirala kao loksodrom u ravni . . . . .	110

2.16	Loksodrom na sferi . . . . .	111
2.17	Loksodromi na torusu . . . . .	112
2.18	Linije konstantnog nagiba na torusu sa njihovom graničnom krivom . . . . .	113
2.19	Komponente vektora krivine . . . . .	114
2.20	Reprezentacija normalne krivine krive na torusu . . . . .	115
2.21	Preseci jednostrukog hiperboloida sa ravnima . . . . .	118
2.22	Dve familije pravih linija na jednostrukom hiperboloidu . . . . .	119
2.23	Krivina, normalna i geodezijska krivina duž heliksa na cilindru . . . . .	120
2.24	Krivina, geodezijska i normalna krivina u tački paralele sfere . . . . .	120
2.25	Normalna i geodezijska krivina $\kappa_n = 0$ i $\kappa_g = \kappa$ u tački krive na katenoidu . . . . .	121
2.26	Reprezentacija normalne krivine krive na torusu . . . . .	122
2.27	Površ normala (levo) i binormala loksodroma na sferi (desno) . . . . .	123
2.28	Površ tangenti, normala i binormala heliksa . . . . .	123
2.29	Konoid i helikoid . . . . .	124
2.30	Opšta zavojna površ (levo) i zavojna površ (desno) . . . . .	124
2.31	Krive na cilindru sa istim tangentama i normalnom krivinom . . . . .	125
2.32	Projekcija vektora krivine krive na konusu na vektor normale konusa . . . . .	126
2.33	Normalan presek loksodroma na torusu . . . . .	126
2.34	Normalna krivina u tački krive na cilindru i krivina odgovarajućeg normalnog preseka . . . . .	127
2.35	Ilustracija napomene 2.5.11 . . . . .	129
2.36	Glavni pravci $\vec{d}^1$ i $\vec{d}^2$ u tački površi . . . . .	130
2.37	Katenoid (levo) i njegova Gausova krivina (desno) predstavljene kao rotacione površi . . . . .	134
2.38	Pseudosfera (levo) i njena srednja krivina (desno) predstavljene kao rotacione površi . . . . .	135
2.39	Hiperboličke (levo) i eliptičke sferne površi (desno) . . . . .	136
2.40	Parabolička (levo), hiperbolička (sredina) i eliptička (desno) pseudosferna površ . . . . .	137
2.41	Hiperbolička sferna i pseudosferna površ sa minimalnim i maksimalnim poluprečnicima $u^2$ -linija . . . . .	138
2.42	Rotacione površi sa Gausovom krivinom $K(u) = k/u^2$ . . . . .	139
2.43	Rotacione površi sa Gausovom krivinom $K(u) = k/u^2$ . . . . .	139
2.44	Rotacione površi sa datom krivinom $K = \exp(x)$ (levo) i $K = \sin x$ (desno) . . . . .	140
2.45	EksPLICITNA površ $S$ iz vizuelizacije 2.5.23 (a) za $a = 3/2$ (levo), linije konstantne Gausove (sredina) i konstantne srednje krivine (desno) . . . . .	141
2.46	Gausova krivina eksplicitne površi $S$ iz vizuelizacije 2.5.23 (a) predstavljena kao eksplicitna površ (levo) i njene linije konstantne Gausove krivine (desno) . . . . .	141
2.47	Srednja krivina eksplicitne površi $S$ iz vizuelizacije 2.5.23 (a) predstavljena kao eksplicitna površ (levo) i njene linije konstantne Gausove krivine (desno) . . . . .	142
2.48	EksPLICITNA površ $S$ iz vizuelizacije 2.5.23 (b) (levo), linije konstantne Gausove (sredina) i konstantne srednje krivine (desno) . . . . .	142
2.49	EksPLICITNA površ iz vizuelizacije 2.5.23 (b), linije nivoa $(u^1)^2 - (u^2)^2 = const$ na površi (levo) i linije nivoa u parametarskoj ravni površi (desno) . . . . .	143
2.50	Pravolinijska površ generisana vektorima normali površi duž krive na površi iz vizuelizacije 2.5.23 (b) . . . . .	143
2.51	Pupčane tačke dvostrukog hiperboloida za različite vrednosti $a$ , $b$ i $c$ . . . . .	146
2.52	Reprezentacija Gausove i srednje krivine krive na hiperboličkom paraboloidu . . . . .	149
2.53	Reprezentacija prve i druge glavne krivine duž krive na hiperboličkom paraboloidu . . . . .	150

2.54	Reprezentacije prve i druge glavne krivine na odgovarajućim pravolinijskim površima . . . . .	151
2.55	Pupčane tačke elipsoida . . . . .	156
2.56	Ojlerova teorema . . . . .	156
2.57	Hiperboličke (levo), paraboličke (isprekidano) i eliptičke (desno) tačke na eksplicitnoj površi . . . . .	160
2.58	Torus sa eliptičkim (spoljašnjim), paraboličkim (isprekidanim) i hiperboličkim (unutrašnjim) tačkama . . . . .	161
2.59	Tangentne ravni elipsoida . . . . .	163
2.60	Tangentne ravni jednostrukog hiperbolida . . . . .	163
2.61	Tangentne ravni torusa u eliptičkoj, paraboličkim i hiperboličkim tačkama . . . . .	164
2.62	Rotacioni paraboloid i površ iz vizuelizacije 2.6.10 . . . . .	165
2.63	Ravna tačka površi iz vizuelizacije 2.6.10 . . . . .	165
2.64	Majmunsko sedlo . . . . .	166
2.65	Majmunsko sedlo i njegov presek sa $x^1x^2$ -ravni . . . . .	166
2.66	Majmunsko sedlo i normalan presek u tački $(u^1, u^2) = (0, 0)$ . . . . .	167
2.67	Dupinova indikatrisa u eliptičkoj tački . . . . .	168
2.68	Dupinova indikatrisa u paraboličkoj tački (levo) i u hiperboličkoj tački sa asimptotskim pravcima (desno) . . . . .	168
2.69	Vizuelizacija napomene 2.7.2 . . . . .	169
2.70	Linije krivine na helikoidu . . . . .	170
2.71	Opšti konus generisan astroidom . . . . .	171
2.72	Druga familija linija krivine na opštem konusu sa slike 2.71 . . . . .	172
2.73	Asimptotske linije na konoidu sa $\varphi(u^1) = \log(1 + u^1)$ . . . . .	174
2.74	Linije krivine na Mebijusovoj traci . . . . .	175
2.75	Oskulatorna i tangentna ravan u tački asimptotske linije . . . . .	176
2.76	Linije krivine na hiperboličkom paraboloidu . . . . .	177
2.77	Linije krivine na eliptičkom konusu . . . . .	178
2.78	Asimptotske linije na katenoidu . . . . .	179
2.79	Asimptotske linije na rotacionoj površi sa $r(u^1) = 1$ i $h(u^1) = \log u^1$ . . . . .	179
2.80	Asimptotske linije na delu torusa za $u^1 \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . . . . .	180
2.81	Familije asimptotskih linija na pseudosferi iz vizuelizacije 2.8.12 . . . . .	180
2.82	Asimptotske linije na eksplicitnoj površi sa $f(u^i) = (u^1)^2 + (u^2)^3$ . . . . .	181
2.83	Razvojna i tangentna površ duž $u^2$ -linije . . . . .	182
2.84	Razvojna i tangentna površ duž $u^2$ -linije . . . . .	182
2.85	Razvojne površi: tangentna površ (levo), opšti cilindar (sredina) i opšti konus (desno) . . . . .	183
2.86	Kružni cilindar i konus generisani linijom krivine na rotacionoj površi . . . . .	186
2.87	Kružni cilindar i konus generisani linijom krivine na rotacionoj površi . . . . .	187
2.88	Tangentna površ generisana linijom krivine na eliptičkom konusu . . . . .	188
2.89	Trostruki ortogonalni sistem sfera, kružnih konusa i ravni . . . . .	190
2.90	Trostruki sistem iz vizuelizacije 2.9.3 . . . . .	191
2.91	Linija krivine na eliptičkom konusu koja predstavlja presek eliptičkog konusa i sfere . . . . .	192
2.92	Trostruki ortogonalni sistem elipsoida i jednostukih i dvostukih hiperboloida (levo) i linije krivine na elipsoidu (desno) . . . . .	193
2.93	Linije krivine na jednostrukom (levo) i dvostrukom hiperboloidu (desno) . . . . .	195
2.94	Torzija duž asimptotske linije na katenoidu (levo) i pseudosferi (desno) . . . . .	198
2.95	$\pm$ torzija duž asimptotske linije na eksplicitnoj površi . . . . .	199
2.96	Katenoid i jedna njegova paralelna površ . . . . .	201

2.97	Hiperbolička sferna površ (levo) i njena paralelna površ sa konstantnom srednjom krivinom $H = -1/2$ (desno) . . . . .	202
2.98	Eliptička sferna površ (levo) i njena paralelna površ sa konstantnom srednjom krivinom $H = -1/2$ (desno) . . . . .	203
2.99	Pseudosfera (levo) i njena paralelna površ (desno) za $a = 1$ . . . . .	203
2.100	Kriva na najmunskom sedlu i njena slika u odnosu na sferno Gausovo preslikavanje . . . . .	204
2.101	Kriva na konoidu i njena slika u odnosu na sferno Gausovo preslikavanje . . . . .	204
2.102	Sferne slike (desno) istog domena (levo) dva različita paraboloida . . . . .	205
2.103	Okoline eliptičke i hiperboličke tačke na torusu . . . . .	205
2.104	Krive i njihove orijentacije u okolinama tačaka sa $K > 0$ , $K = 0$ i $K < 0$ i njihove slike u odnosu na Gausovo preslikavanje . . . . .	206
2.105	Kružne okoline nule na hiperboličkom paraboloidu . . . . .	208
3.1	Veza između krivine i geodezijske krivine krive na površi (teorema 3.1.1) . . . . .	210
3.2	Reprezentacija krive $-0.9\kappa_g$ duž loksodroma (isprekidano) na pseudosferi . . . . .	216
3.3	Reprezentacija krive $-3\kappa_g$ duž loksodroma (isprekidano) na jediničnoj sferi . . . . .	217
3.4	Pravolinijska površ generisana loksodromom na jediničnoj sferi i vektorima $\vec{t}(s)$ . . . . .	219
3.5	Pravolinijska površ generisana loksodromom na pseudosferi i vektorima $\vec{t}(s)$ . . . . .	219
3.6	Geodezijske krivine duž parametarskih linija hiperboličkog paraboloida . . . . .	221
3.7	Geodezijska linija na konusu i vektor normale površi u oskulatornoj ravni u tački . . . . .	225
3.8	Glavni krugovi (levo) i geodezijske linije na sferi (desno) . . . . .	230
3.9	Geodezijske linije na konusu generisanim loksodromom na sferi (levo) i na kružnom konusu (desno) . . . . .	235
3.10	Geodezijske linije na pseudosferi . . . . .	237
3.11	Kleroova teorema . . . . .	239
3.12	Geodezijske linije prvog karakterističnog oblika . . . . .	244
3.13	Geodezijske linije drugog karakterističnog oblika . . . . .	245
3.14	Geodezijske linije drugog karakterističnog oblika . . . . .	245
3.15	Geodezijske linije drugog karakterističnog oblika i granične linije za $u^1 = \hat{u}^1$ . . . . .	246
3.16	Geodezijske linije trećeg karakterističnog oblika i njihove asimptote . . . . .	248
3.17	Parametarske linije za geodezijske parametre na rotacionom paraboloidu . . . . .	257
3.18	Familija geodezijskih linija na konusu (isprekidano) i njihove ortogonalne trajektorije . . . . .	258
3.19	Geodezijske paralelne i polarne koordinate na rotacionim površima . . . . .	259
3.20	Krive paralelne loksodromima na kružnom konusu . . . . .	260
3.21	Geodezijske paralelne koordinate na cilindru . . . . .	262
3.22	Geodezijske paralelne koordinate na kružnom konusu . . . . .	263
3.23	Geodezijske polarne koordinate na cilindru . . . . .	264
3.24	Geodezijske polarne koordinate na kružnom konusu . . . . .	265
3.25	Paralelno pomeranje duž loksodroma na sferi . . . . .	269
3.26	Paralelno pomeranje duž geodezijske linije na konusu i torusu . . . . .	270
3.27	Stereografska projekcija . . . . .	278
3.28	Princip stereografske projekcije . . . . .	279
3.29	Slika međustanja stereografske projekcije . . . . .	280
3.30	Izotermalni parametri na sferi i pseudosferi . . . . .	283
3.31	Lambertova preslikavanja iz vizuelizacije 3.9.19 . . . . .	290
3.32	Lambertova projekcija sfere na cilindar . . . . .	295
3.33	Geodezijski trouglovi na sferi (levo) i pseudosferi (desno) . . . . .	299

3.34	Eneperova površ sa parametarskom reprezentacijom (3.161) . . . . .	309
3.35	Eneperova površ sa parametarskom reprezentacijom (3.162) . . . . .	310
3.36	Eneperova površ sa linijama samopresecanja . . . . .	310
3.37	Nekoliko grana Šerkove minimalne površi . . . . .	312

---

# Uvod

Proučavanje diferencijalne geometrije krivih i površi može biti lokalnog i globalnog karaktera sa različitim ciljevima. Jedan od ciljeva je dalje razvijanje geometrije višedimenzionalnih prostora, tzv. mnogostrukosti, kao npr. u [4, 119]. Za postizanje ovog cilja potrebno je i razumevanje elemenata topologije, dobra intuicija, sposobnost rešavanja problema, itd. kao npr. u [5, 6, 7, 121].

Iz svakodnevnog iskustva imamo dobar osećaj za objekte u dvodimenzionom i trodimenzionom euklidskom prostoru, pa njihovo vizuelno predstavljanje u ovoj konstalaciji doprinosi lakšem razumevanju obrađenih pojmova i koncepata. Na ovaj način se razvija intuicija koja može biti od velike koristi pri prelasku na apstraktniji pristup ovoj oblasti. Imajući to u vidu, opredelili smo se za proučavanje lokalne teorije krivih i površi u trodimenzionom euklidskom prostoru. Pomoću odgovarajuće vizuelizacije, želimo da kod čitaoca razvijemo vezu između intuitivnog poimanja objekata i matematičkog načina njihovog razmatranja. To mu može pružiti mogućnost razvoja prostornih sposobnosti koje doprinose razvijanju i drugih opštih sposobnosti.

Da bismo povezali korektno matematičko proučavanje krivih i površi i njihovo vizuelno predstavljanje, ove objekte smatramo skupovima tačaka u trodimenzionom euklidskom prostoru koje opisujemo odgovarajućim matematičkim reprezentacijama.

Da bismo dobili sliku nekog matematičkog objekta, prvo ga analiziramo, odredimo njegovu matematičku reprezentaciju, zatim tu reprezentaciju implementiramo u izabranom programskom okruženju, eksportujemo sliku u odgovarajućem grafičkom formatu, u nekim slučajevima je potrebno postprocesuirati dobijenu sliku radi dodavanja elemenata koje nisu predviđeni u tom programskom okruženju i na kraju odrediti tehničke karakteristike rezultujućeg fajla i eventualno izvršiti njegovu kompresiju.

Matematička reprezentacija objekta može biti zadata u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku. Eksplicitni oblik favorizuje jednu koordinatu, što je u računarskoj grafici zgodno u dvodimenzionoj grafici kod algoritmima rasterizacije, pogotovu kod onih koji koriste linije skeniranja. Ipak, čim objekti postanu malo složeniji, favorizovanje jedne koordinate postaje prepreka za dalji rad. Implicitni oblik zahteva određivanje nula funkcija dve realne promenljive, što je računski dosta zahtevno, i memorijski i vremenski, pa se izbegava kad god je to moguće. Zbog toga je u računarskoj grafici za određivanje pozicije tačaka najzgodniji parametarski oblik.

Isctavanje krivih, naročito u dvodimenzionom prostoru nije teško, ali grafička reprezentacija površi donosi veći broj izazova, kao što su određivanje dela površi zaklonjenog nekim drugim delom te iste površi, konturne linije kao granične linije vidljivog dela površi, kao i njihovu vidljivost. Ako se na sceni nalazi veći broj objekata, treba odrediti njihov međusobni odnos, koji deo kog objekta je zaklonjen drugim objektima, linije preseka ako postoje i drugo.

Programsko okruženje u kome implementiramo scenu zadatu matematičkim reprezentacijama objekata koje se nalaze u njoj može biti različito. Jedna vrsta okruženja su platforme za vizuelno predstavljanje matematičkih sadržaja, kao što je *GeoGebra* [75]. Složenija vrsta okruženja su programski paketi za simboličko izračunavanje sa mogućnostima vizuelizacije,



kao što su *Mathematica* [57, 58, 175, 188], *MatLab* [55], *MathCAD* [14], *Maple* [142], *MuPAD* [76] i drugi.

Takođe se može programirati u nekom standardnom programskom jeziku, kao što su *C++*, *C#*, *Java*, uz korišćenje ugrađenih funkcija za crtanje ili uz korišćenje neke poznate biblioteke funkcija kao što je *OpenGL*. Na primer, vizuelizacije u programskom paketu *Java View* autora Konrada Polthiera opisane su u [13, 62, 72, 130]. Neke vizuelizacije u *C++* opisane su u [183, 138, 173, 174] sa teorijskom podlogom u [172].

Mi svoje vizuelizacije razvijamo u *Delphi*-ju bez korišćenja *OpenGL*-a. Za tehniku iscrtanja koristimo *linijsku grafiku* sa određivanjem vidljivosti površi i konturnih linija. Ovaj pristup smo izabrali jer najtačnije moguće prikazuje linije, specijalno različite vrste linija na površima, što je od izuzetne važnosti za vizuelizaciju diferencijalne geometrije. Dobijena slika je čista bez nepotrebnih detalja pa se lako uočavaju odnosi koje želimo da prikažemo.

Fundamente linijske grafike postavio je Kurt Endl u [50, 46, 47, 48] i koristio je za crtanje sfera, cilindara, konusa i Platonskih tela. Eberhard Malkowsky je dogradio ovaj softver i iskoristio ga za vizuelizaciju diferencijalne geometrije [86], za šta je dobio nagrade [49, 51]. Iz ovog softvera su proizašli doktorski rad [53], magistarska teza [189] i radovi [54, 77, 78, 79]. Razvijanju softvera se kasnije priključila Vesna Veličković, iz čega je proizašla njena doktorska disertacija [184] i veći broj radova koji se pominju o ovoj knjizi.

Softverski paket koji razvijaju Vesna Veličković i Eberhard Malkowsky se naziva *MV-Graphics*. Njegovi principi su opisani u [80, 81, 82, 83, 86, 97, 105, 106, 109, 164, 166]. Specijalno, konturna linija nekih površi se obrađuje u [110, 167]. Svi alati za crtanje su razvijeni od početka, bez korišćenja dodatnih grafičkih biblioteka, što daje fleksibilnost dorade i dogradnje željenih elemenata, kao npr. manipulacija vidljivošću u [95]. Pored crtanja krivih i površi zadatih parametarskim reprezentacijama, *MV-Graphics* ima mogućnost nalaženja nula realnih funkcija dve realne promenljive, što omogućava i vizuelizaciju implicitno zadatih površi. Krive i površi mogu biti zadate i nekim geometrijskim principom bez unapred definisane matematičke reprezentacije, kao u poglavlju 1.4, pa mogućnost programiranja koju imamo u paketu *MV-Graphics* dolazi do izražaja. Ipak, vreme iscrtanje slike je u tom slučaju daleko duže nego kad je objekat zadat parametarskom reprezentacijom. To se naročito primećuje kod kompleksnih geometrijskih principa, kao što je generisanje kristala [94, 170, 171] počevši od neke potencijalne površi [99]. Vizuelizacije ovog tipa možemo videti u [91, 112, 113], njihovu matematičku pozadinu u [10, 36, 37, 38, 88, 89, 90], a dalja istraživanja se mogu naći u [2, 39, 40, 43, 44]. Uopštenja nekih vizuelizacija datih u ovoj knjizi možemo videti u topologiji [84, 85, 92, 93, 111, 169], u radovima [11, 12, 36] je data njihova teorijska osnova, a dalja istraživanja u ovoj oblasti u [87]. Na kraju, radovi iz drugih oblasti matematike koji se koriste u našim vizuelizacijama su [3, 20, 21, 41, 42].

U ovoj knjizi vizuelizaciju obrađujemo samo na nivou matematičkog analiziranja objekata i zadavanja njihovih parametarskih reprezentacija, a konačan rezultat prikazujemo u vidu slika. Programerske i tehničke detalje implementacije izostavljamo.

Sve vizuelizacije prikazane u ovoj knjizi su rađene u softverskom paketu *MV-Graphics* autora Vesne Veličković i Eberhard-a Malkowsky-og i skoro sve su rađene za potrebe ove knjige, a za vizuelizacije preuzete iz objavljenih radova dati su citati u odgovarajućim poglavljima.

Knjige iz diferencijalne geometrije koje obrađuju teme bliske temama u našoj knjizi su [24, 70, 73, 71, 60, 67, 15, 148, 154, 128, 129, 153, 157, 158, 160, 177, 178, 179, 180]. Takođe se pozivamo na sledeću literaturu sa kursovima iz diferencijalne geometrije [1, 8, 9, 18, 56, 59, 69, 74, 117, 122, 131, 136, 143, 144, 145, 146, 150, 156, 161]. Još neke interesantne teme se mogu naći u [27, 61, 64, 66, 116, 120, 127, 137, 141], a na ruskom [6, 7, 25, 28]. Udžbenici

na srpskom koji obrađuju ovu oblast su [16, 19, 32, 45, 118, 135, 152], zbirke zadataka [17, 123, 162, 181], a neke specifične teme su obrađene u [115, 26], doktorskoj disertaciji [182] i magistarskim radovima [185, 186, 187, 190, 191, 192, 193]. Diferencijalna geometrija ima značajnu primenu u različitim oblastima, npr. u fizici [34, 132, 133, 149, 151, 163], fizičkoj hemiji [91, 112, 114], biologiji [139] i inženjerskim naukama [30, 33, 35, 68, 124, 125, 126, 140, 147, 159, 176].