

Јован Ђорђевић, Захарије Радивојевић,
Марија Пунт, Жарко Станисављевић

ОСНОВИ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ

АКАДЕМСКА МИСАО

Београд, 2017.

Јован Ђорђевић, Захарије Радивојевић, Марија Пунт, Жарко Станисављевић

ОСНОВИ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ

Рецензенти:

Проф. др Мило Томашевић
Доц. др Милош Цветановић

Издаје и штампа:

Академска мисао, Београд

Дизајн насловне стране

Зорица Марковић, академски сликар

Тираж: 200 примерака

ИСБН 978-86-7466-669-2

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

ПРЕДГОВОР

Књига представља уџбеник за предмете Основи рачунарске технике и Основи рачунарске технике I и II на Електротехничком факултету у Београду.

У глави 1 се дефинише Булова алгебра, дају основне теореме Булове алгебре и уводи Булова алгебра на скупу од два елемента.

У глави 2 се дају основни појмови везани за прекидачке функције и разматра представљање прекидачких функција Буловим изразима.

У глави 3 се уводе основни појмови везани за минимизацију прекидачких функција и представља графичка метода одређивања минималних дисјунктивних и конјунктивних нормалних форми помоћу Карноових карти.

У глави 4 се даје дефиниција прекидачких мрежа и уводи подела прекидачких мрежа на комбинационе и секвенцијалне, разматрају логички и меморијски елементи који се користе за реализацију прекидачких мрежа и дефинише структура комбинационих и секвенцијалних прекидачких мрежа.

У глави 5 се дају поступак анализе комбинационих прекидачких мрежа, којим се на основу задате структурне шеме одређује закон функционисања, и поступак синтезе комбинационих прекидачких мрежа којим се на основу задатог закона функционисања одређује структурна шема.

У глави 6 се дају поступак анализе секвенцијалних прекидачких мрежа, којим се на основу задате структурне шеме одређује закон функционисања, и поступак синтезе секвенцијалних прекидачких мрежа којим се на основу задатог закона функционисања одређује структурна шема.

У глави 7 се разматрају стандардни комбинациони модули и то декодер, кодер, мултиплексер, демултиплексер, помераач, инкрементер и декрементер, сабирач и одузимаач, аритметичка јединица, логичка јединица, аритметичко-логичка јединица и компаратор.

У глави 8 се разматрају стандардни секвенцијални модули и то регистар, бројач, регистар са више функција и меморија са равноправним приступом.

У глави 9 се разматра усвојени поступак пројектовања уређаја и даје реализација јединица са једном и више операција.

Текст, примери, слике и изрази су пажљиво проверавани. Међутим, аутори су свесни да је могуће да су се ипак поткрале одређене грешке, па ће бити захвални свима онима који им буду указали на њих.

Аутори

Београд

15.02.2017.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР	a
1 БУЛОВА АЛГЕБРА	1
1.1 ДЕФИНИЦИЈА БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ	1
1.2 ТЕОРЕМЕ БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ	3
1.3 БУЛОВА АЛГЕБРА НА СКУПУ СА ДВА ЕЛЕМЕНТА	6
2 ПРЕКИДАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ	9
2.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	9
2.2 ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРЕКИДАЧКИХ ФУНКЦИЈА БУЛОВИМ ИЗРАЗИМА	10
2.2.1 Производи и суме	10
2.2.2 Дисјунктивне и конјунктивне нормалне форме.....	13
2.2.2.1 Дефиниција нормалних форми	13
2.2.2.2 Представљање прекидачких функција у облику СДНФ и СКНФ	14
2.2.2.3 Трансформисање ДНФ у СДНФ и КНФ у СКНФ	15
2.2.2.4 Трансформисање СДНФ у ДНФ и СКНФ у КНФ	17
2.2.2.5 Трансформисање у нормалну форму	18
2.2.3 Прекидачке функције једне и две променљиве.....	18
2.3 ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРЕКИДАЧКИХ ФУНКЦИЈА КУБОВИМА	20
3 МИНИМИЗАЦИЈА ПРЕКИДАЧКИХ ФУНКЦИЈА.....	23
3.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	23
3.1.1 Импликанте и имплиценте	23
3.1.2 Просте импликанте и имплиценте	24
3.1.3 Непреопишрне ДНФ и КНФ.....	25
3.1.4 Битне импликанте и имплиценте.....	26
3.1.5 Формирање минималне ДНФ и КНФ.....	27
3.2 ОДРЕЂИВАЊЕ МИНИМАЛНИХ ДНФ И КНФ ПОМОЋУ КАРНООВИХ КАРТИ.....	27
3.2.1 Прекидачке функције 4 променљиве.....	27
3.2.2 Прекидачке функције 2 и 3 променљиве.....	35
3.2.3 Прекидачке функције 5 променљивих.....	38
3.2.4 Прекидачке функције 6 променљивих.....	40
4 ПРЕКИДАЧКЕ МРЕЖЕ.....	45
4.1 ОПШТЕ НАПОМЕНЕ.....	45
4.2 ЛОГИЧКИ И МЕМОРИЈСКИ ЕЛЕМЕНТИ.....	48
4.2.1 Логички елементи	48
4.2.2 Меморијски елементи	50
4.2.2.1 Асинхрони флип-флопови.....	51
4.2.2.2 Тактовани флип-флопови.....	51
4.3 СТРУКТУРА КОМБИНАЦИОНИХ И СЕКВЕНЦИЈАЛНИХ ПРЕКИДАЧКИХ МРЕЖА ..	55
4.3.1 Структура комбинационих прекидачких мрежа	55
4.3.2 Структура секвенцијалних прекидачких мрежа	57
5 КОМБИНАЦИОНЕ ПРЕКИДАЧКЕ МРЕЖЕ	59
5.1 АНАЛИЗА КОМБИНАЦИОНИХ МРЕЖА	59
5.2 СИНТЕЗА КОМБИНАЦИОНИХ МРЕЖА	60
5.2.1 Синтеза комбинационих мрежа у базису НЕ, И и ИЛИ.....	61
5.2.1.1 И и ИЛИ елементи без ограничења броја улаза	61
5.2.1.1.1 Закон функционисања у облику ДНФ или КНФ.....	61
5.2.1.1.1.1 Комбинационе мреже са једним излазом	61
5.2.1.1.1.2 Комбинационе мреже са више излаза	63
5.2.1.1.2 Закон функционисања у облику који није ДНФ или КНФ.....	65
5.2.1.2 И и ИЛИ елементи са ограниченим бројем улаза	65

5.2.2	Синтеза комбинационих мрежа у базисима НИ и НИЛИ.....	67
5.2.2.1	Трансформација израза на НИ или НИЛИ.....	67
5.2.2.1.1	Израз ДНФ и базис НИ.....	67
5.2.2.1.2	Израз КНФ и базис НИЛИ.....	69
5.2.2.1.3	Израз ДНФ и базис НИЛИ.....	70
5.2.2.1.4	Израз КНФ и базис НИ.....	72
5.2.2.2	Трансформација структурне шеме са НЕ, И и ИЛИ на НИ или НИЛИ.....	74
6	СЕКВЕНЦИЈАЛНЕ ПРЕКИДАЧКЕ МРЕЖЕ.....	77
6.1	АНАЛИЗА СЕКВЕНЦИЈАЛНИХ МРЕЖА.....	77
6.1.1	Опште напомене.....	77
6.1.2	Секвенцијална мрежа Милијевог типа.....	78
6.1.3	Секвенцијална мрежа Муровог типа.....	80
6.2	СИНТЕЗА СЕКВЕНЦИЈАЛНИХ МРЕЖА.....	83
6.2.1	Опште напомене.....	83
6.2.2	Секвенцијална мрежа Милијевог типа.....	84
6.2.3	Секвенцијална мрежа Муровог типа.....	87
6.2.4	Конструкција структурних шема флип-флопова.....	91
6.2.4.1	Асинхрони флип-флопови.....	91
6.2.4.2	Тактовани флип-флопови.....	96
6.2.4.2.1	Једноставне структурне шеме.....	97
6.2.4.2.1.1	Тактовани D флип-флоп.....	97
6.2.4.2.1.2	Тактовани T флип-флоп.....	99
6.2.4.2.1.3	Тактовани RS флип-флоп.....	100
6.2.4.2.1.4	Тактовани JK флип-флоп.....	102
6.2.4.2.1.5	Тактовани флип-флопови са асинхроним улазима.....	105
6.2.4.2.2	Сложене структурне шеме.....	106
6.2.4.2.2.1	MS флип-флопови.....	106
6.2.4.2.2.2	ET флип-флопови.....	109
7	СТАНДАРДНИ КОМБИНАЦИОНИ МОДУЛИ.....	115
7.1	ДЕКОДЕР.....	115
7.2	КОДЕР.....	119
7.2.1	Обичан кодер.....	120
7.2.2	Приоритетни кодер.....	128
7.3	МУЛТИПЛЕКСЕР.....	156
7.4	ДЕМУЛТИПЛЕКСЕР.....	160
7.5	ПОМЕРАЧ.....	164
7.6	ИНКРЕМЕНТЕР И ДЕКРЕМЕНТЕР.....	168
7.6.1	Инкрементер и декрементер са серијским генерисањем преноса и позајмица.....	168
7.6.2	Инкрементер и декрементер са паралелним генерисањем преноса и позајмица.....	175
7.7	САБИРАЧ И ОДУЗИМАЧ.....	186
7.7.1	Сабирач и одузимац са серијским генерисањем преноса и позајмице.....	187
7.7.2	Сабирач и одузимац са паралелним генерисањем преноса и позајмице.....	194
7.8	АРИТМЕТИЧКА ЈЕДИНИЦА.....	207
7.8.1	Аритметичка јединица са серијским генерисањем преноса и позајмица.....	207
7.8.2	Аритметичка јединица са паралелним генерисањем преноса и позајмица.....	216
7.8.3	Аритметичка јединица са сабирачем.....	218
7.9	ЛОГИЧКА ЈЕДИНИЦА.....	220
7.10	АРИТМЕТИЧКО ЛОГИЧКА ЈЕДИНИЦА.....	225
7.11	КОМПАРАТОР.....	236
7.11.1	Компаратор са серијским генерисањем сигнала упоређивања.....	236
7.11.2	Компаратор са паралелним генерисањем сигнала упоређивања.....	240
8	СТАНДАРДНИ СЕКВЕНЦИЈАЛНИ МОДУЛИ.....	251
8.1	РЕГИСТАР.....	251
8.1.1	Опште напомене.....	251
8.1.2	Регистар са паралелним приступом.....	251
8.1.3	Регистар са серијским приступом.....	257
8.1.3.1	Регистар са серијским приступом померањем удесно.....	257
8.1.3.2	Регистар са серијским приступом померањем улево.....	262

8.2	БРОЈАЧ.....	266
8.2.1	Опште напомене.....	266
8.2.2	Бројач по модулу 2^n	267
8.2.2.1	Инкрементирајући бројач по модулу 2^n	267
8.2.2.2	Декрементирајући бројач по модулу 2^n	279
8.2.3	Бројач по модулу мањем од 2^n	287
8.3	РЕГИСТАР СА ВИШЕ ОПЕРАЦИЈА.....	294
8.3.1	Опште напомене.....	294
8.3.2	Регистар са операцијама паралелног уписа, серијског уписа померањем удесно и улево и брисања.....	297
8.3.3	Регистар са операцијама паралелног уписа, инкрементирања, декрементирања и брисања.....	301
8.4	МЕМОРИЈА СА РАВНОПРАВНИМ ПРИСТУПОМ.....	306
8.4.1	Опште напомене.....	306
8.4.2	Структурна шема меморијског модула.....	307
8.4.3	Конструкција меморија.....	310
8.4.4	Параметри меморијског модула.....	313
9	ПРОЈЕКТОВАЊЕ УРЕЂАЈА.....	315
9.1	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ.....	315
9.1.1	Структура уређаја.....	315
9.1.2	Реализација јединица уређаја.....	315
9.1.2.1	Операциона јединица.....	316
9.1.2.2	Управљачка јединица.....	318
9.1.2.3	Пројектовање операционе и управљачке јединице.....	318
9.1.3	Повезивање јединица дигиталног уређаја.....	319
9.1.3.1	Повезивање директним везама.....	319
9.1.3.2	Повезивање магистралом.....	320
9.1.4	Реализација јединица са једном и више операција.....	321
9.2	ЈЕДИНИЦА СА ЈЕДНОМ ОПЕРАЦИЈОМ.....	324
9.2.1	Операциона јединица.....	324
9.2.1.1	Алгоритам операције.....	324
9.2.1.2	Структурна шема.....	326
9.2.1.2.1	Директне везе.....	326
9.2.1.2.2	Интерне магистрале.....	329
9.2.1.3	Алгоритам генерисања управљачких сигнала.....	332
9.2.2	Управљачка јединица.....	336
9.2.2.1	Ожичено генерисање сигнала.....	337
9.2.2.1.1	Шетајућа јединица.....	337
9.2.2.1.2	Секвенцијална мрежа.....	339
9.2.2.1.3	Бројач корака.....	343
9.2.2.2	микропрограмско генерисање сигнала.....	348
9.2.2.2.1	Један тип микроинструкције.....	348
9.2.2.2.2	Два типа микроинструкција.....	356
9.3	ЈЕДИНИЦА СА ВИШЕ ОПЕРАЦИЈА.....	364
9.3.1	Операциона јединица.....	364
9.3.1.1	Алгоритми операција.....	364
9.3.1.1.1	Операције које се извршавају у једној итерацији.....	364
9.3.1.1.2	Операције које се извршавају у више итерација.....	366
9.3.1.2	Структурна шема.....	369
9.3.1.2.1	Директне везе.....	369
9.3.1.2.2	Интерне магистрале.....	375
9.3.1.3	Алгоритам генерисања управљачких сигнала.....	379
9.3.2	Управљачка јединица.....	390
9.3.2.1	Ожичено генерисање сигнала.....	390
9.3.2.1.1	Шетајућа јединица.....	390
9.3.2.1.2	Секвенцијална мрежа.....	393
9.3.2.1.3	Бројач корака.....	399
9.3.2.2	Микропрограмско генерисање сигнала.....	406
9.3.2.2.1	Један тип микроинструкције.....	406
9.3.2.2.2	Два типа микроинструкција.....	413
9.3.2.2.3	Кодирање управљачких сигнала операционе јединице.....	423
9.3.2.2.3.1	Вертикално кодирање управљачких сигнала операционе јединице.....	424

9.3.2.2.3.2	Мешовито кодирање управљачких сигнала операционе јединице	432
9.3.2.2.4	Нанопрограмско генерисање сигнала	441
9.4	ДОДАТАК	446
9.4.1	Аритметичка операција <i>MULU</i>	446
9.4.2	Аритметичка операција <i>DIVU</i>	454
9.4.3	Управљачка јединица типа шетајућа јединица	459
9.4.4	Управљачка јединица са једним типом микроинструкције	460
9.4.5	Управљачка јединица са два типа микроинструкција	462
10	ЛИТЕРАТУРА	465

1 БУЛОВА АЛГЕБРА

У овој глави се дефинише Булова алгебра, дају основне теореме Булове алгебре и уводи Булова алгебра на скупу са два елемента.

1.1 ДЕФИНИЦИЈА БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ

Нека су на скупу $B = \{a, b, c, \dots\}$ дефинисане унарна операција $-$ и бинарне операције $+$ и $\cdot$ и то тако да за свако $a \in B$ вреди $\bar{a} = b$, где је $b \in B$, и за свако $a, b \in B$ вреди $a + b = c$ и $a \cdot b = c$, где је $c \in B$. Операције $-$, $+$ и $\cdot$ се обично називају комплементирање, сабирање и множење.

Скуп B са операцијама $-$, $+$ и $\cdot$ представља Булову алгебру ако операције задовољавају следеће аксиоме – постулате:

Аксиома А.1. - закон асоцијативности

$$A.1.a) a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$A.1.b) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Аксиома А.2. - закон комутативности

$$A.2.a) a + b = b + a$$

$$A.2.b) a \cdot b = b \cdot a$$

Аксиома А.3. - закон неутралних елемената 0 и 1

$$A.3.a) a + 0 = 0 + a = a$$

$$A.3.b) a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Аксиома А.4. - закон комплементарности

$$A.4.a) a + \bar{a} = 1$$

$$A.4.b) a \cdot \bar{a} = 0$$

Аксиома А.5. - закон дистрибутивности

$$A.5.a) a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$A.5.b) a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Аксиома А.1. Булове алгебре, која се назива и закон асоцијативности, одређује да за операцију сабирања није битан редослед извршавања операције и да је свеједно да ли се најпре реализује сабирање елемената b и c и затим елемента a или најпре сабирање елемената a и b и затим елемента c . Исто важи и за операцију множења.

Аксиома А.2. Булове алгебре, која се назива и закон комутативности, одређује да за операцију сабирања није битан редослед писања симбола елемената и да је свеједно да ли се најпре пише a па b или b па a . Исто важи и за операцију множења.

Аксиома А.3. Булове алгебре, која се назива и закон неутралних елемената 0 и 1, одређује да за операцију сабирања постоји неутрални елемент константа 0 тако да за сваки елемент a вреди да је $a+0$ или $0+a$ једнако a . Слично важи и за операцију множења за коју постоји неутрални елемент константа 1 тако да за сваки елемент a вреди да је $a \cdot 1$ или $1 \cdot a$ једнако a .

Аксиома А.4. Булове алгебре, која се назива и закон комплементарности, одређује да је код операције сабирања сума елемента и његовог комплемента 1. Слично важи и за операцију множења код које је производ елемента и његовог комплемента 0.

Аксиома А.5. Булове алгебре, која се назива и закон дистрибутивности, одређује да постоји дистрибутивност операције множења у односу на операцију сабирања и да се производ елемента a и суме елемената b и c може написати и као сума производа елемената a и b и елемената a и c . Слично постоји и дистрибутивност операције

сабирања у односу на операцију множења па се сума елемента a и производа елемената b и c може написати и као производ сума елемената a и b и елемената a и c .

Из аксиома Булове алгебре се види да су све аксиоме дате у облику једнакости Булових израза и да постоји симетричност аксиома Булове алгебре.

Булови изрази се формирају комбинацијом симбола који у Буловој алгебри означавају елементе и операције. При томе a , b и c означавају произвољне елементе a 0 и 1 константе. Ради једноставнијег писања Булових израза усвојена је конвенција о приоритету операција по којој највиши приоритет има унарна операција $" - "$, затим нижи приоритет има бинарна операција $" \cdot "$ и најнижи приоритет има бинарна операција $" + "$.

У Буловим изразима се заграде користе за промену редоследа операција. Као пример се могу узети израз $a \cdot b + c$ и израз $a \cdot (b + c)$. У случају израза $a \cdot b + c$ применом усвојене конвенције о приоритетима операција најпре се реализује множење a и b , а затим сабирање са c , док се у случају израза $a \cdot (b + c)$ коришћењем заграда мења редослед операција, па се најпре реализује сабирање b и c , а затим множење са a .

Заграде се не морају писати када је и поред конвенције о приоритетима операција јасан редослед операција. Као пример се могу узети израз $(a + b)$ и израз $a + b$. У случају израза $(a + b)$ се заградама одређује да треба променити редослед операција и најпре реализовати сабирање a и b , а затим комплементирање. Међутим и из израза $a + b$ је јасно да, и поред тога што нема заграда, најпре треба реализовати сабирање a и b , а затим комплементирање и да се уместо $(a + b)$ може писати $a + b$.

Знак операције множења $" \cdot "$ се може изоставити. Као пример се могу узети израз $a \cdot b$ и израз ab . У случају израза $a \cdot b$ се појављује симбол операције множења. Међутим и из израза ab је јасно да треба реализовати множење елемената a и b , па се уместо израза $a \cdot b$ може писати израз ab .

Симетричност аксиома Булове алгебре се огледа у томе да су у изразима под а) и б) за сваку од пет аксиома симболи елемената и операције $" - "$ непромењени, да је сваки симбол операције $" + "$ замењен симболом операције $" \cdot "$ и обрнуто и да је сваки симбол константе $" 1 "$ замењен симболом константе $" 0 "$ и обрнуто. Из симетричности аксиома Булове алгебре произлази принцип дуалности, при чему се у дефиницији принципа дуалности јавља појам дуалног израза. Каже се да је Булов израз Q^d дуалан Буловом изразу Q уколико је Булов израз Q^d добијен од Буловог израза Q тако што је у њему сваки симбол елемента и сваки симбол операције $" - "$ задржан непромењен, сваки симбол операције $" + "$ замењен симболом операције $" \cdot "$ и обрнуто и сваки симбол константе $" 1 "$ замењен симболом константе $" 0 "$ и обрнуто. Истим поступком се од Буловог израза $(Q^d)^d$ добија Булов израз Q , па важи и да је Булов израз Q дуалан израз Буловом изразу $(Q^d)^d$.

Принцип дуалности, чији се математички доказ овде не даје, дефинише да ако у Буловој алгебри вреди да је $Q(a, b, c, \dots) = R(a, b, c, \dots)$, где су $Q(a, b, c, \dots)$ и $R(a, b, c, \dots)$ Булови изрази, тада вреди и једнакост $Q^d(a, b, c, \dots) = R^d(a, b, c, \dots)$, где су Q^d и R^d дуални Булови изрази за Булове изразе Q и R , а симболи $a, b, c, \dots$ и $x, y, z, \dots$ означавају произвољне елементе Булове алгебре. Из симетричности аксиома Булове алгебре произлази и могућност доказивања неких релација дуалном супституцијом. Нека је претходно доказано да важи нека релација и нека треба доказати да важи и нека друга релација у којој се појављују Булови изрази који су дуални Буловим изразима у претходно доказаној релацији. Та друга релација се може доказати истим формалним

поступком као и претходно доказана релација уз задржавање симбола сваког елемента и операције "-", замену симбола операције "+" симболом операције "." и обрнуто и заменом симбола константе "1" симболом константе "0" и обрнуто.

1.2 ТЕОРЕМЕ БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ

Основне теореме Булове алгебре и њихови докази су дати у даљем тексту.

Теорема Т.1. У Буловој алгебри вреди

$$T.1.a. \bar{0} = 1 \text{ и}$$

$$T.1.b. \bar{1} = 0$$

Код доказа ове теореме се полази од аксиома А.4. (закон комплементарности) који дефинише да за сваки елемент скупа $B = \{a, b, c, \dots\}$ важи да је $a + \bar{a} = 1$ и $a \cdot \bar{a} = 0$ и од аксиома А.3. (закон неутралних елемената 0 и 1) који дефинише да на скупу B постоје и неутрални елементи константа 0 и 1 за које важи да је $a + 0 = 0 + a = a$ и $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Аксиом А.4. важи за све елементе скупа B укључујући и константе 0 и 1. Када се у изразима $a + \bar{a} = 1$ и $a \cdot \bar{a} = 0$ замени $a = 0$ добија се да је $0 + \bar{0} = 1$ и $0 \cdot \bar{0} = 0$. Пошто је 0 неутрални елемент за "+" то је једино решење за $\bar{0}$ које задовољава обе релације $\bar{0} = 1$. Када се у изразима $a + \bar{a} = 1$ и $a \cdot \bar{a} = 0$ замени $a = 1$ добија се да је $1 + \bar{1} = 1$ и $1 \cdot \bar{1} = 0$. Пошто је 1 неутрални елемент за "." то је једино решење за $\bar{1}$ које задовољава обе релације $\bar{1} = 0$.

Теорема Т.2. У Буловој алгебри вреди

$$T.2. \bar{\bar{a}} = a$$

Код доказа ове теореме се полази од аксиома А.4. који дефинише да за сваки елемент скупа $B = \{a, b, c, \dots\}$ важи да је

$$a + \bar{a} = 1 \text{ и } a \cdot \bar{a} = 0$$

Када се у овим изразима уместо a стави $\bar{a}$ добија се да је

$$\bar{a} + a = 1 \text{ и } \bar{a} \cdot a = 0$$

Када се на ове изразе примени аксиом А.2. добија се да је

$$\bar{\bar{a}} + \bar{a} = 1 \text{ и } \bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} = 0$$

Када се ови изрази упореде са изразима

$$a + \bar{a} = 1 \text{ и } a \cdot \bar{a} = 0$$

од којих се кренуло са овим доказом, следи да је

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Тиме је теорема Т.2. доказана.

Теорема Т.3. У Буловој алгебри вреди

$$T.3.a. a + 1 = 1 \text{ и}$$

$$T.3.b. a \cdot 0 = 0$$

Код доказа теореме Т.3.а. се најпре на основу аксиома А.3.б. уместо $a+1$ пише $(a+1) \cdot 1$, тако да се добија

$$a+1 = (a+1) \cdot 1$$

Затим се на основу аксиома А.4.а. уместо 1 пише $(a+\bar{a})$, тако да се добија

$$a+1 = (a+1) \cdot (a+\bar{a})$$

Потом се на основу аксиома А.5.б. уместо $(a+1) \cdot (a+\bar{a})$ пише $a + (1 \cdot \bar{a})$, тако да се добија

$$a+1 = a + (1 \cdot \bar{a})$$

Даље се на основу аксиома А.3.б. уместо $1 \cdot \bar{a}$ пише $\bar{a}$, тако да се добија

$$a+1 = a + \bar{a}$$

На крају се на основу аксиома А.4.а. уместо $a + \bar{a}$ пише 1, тако да се добија
 $a + 1 = 1$

Тиме је теорема Т.3.а. доказана.

Код доказа теореме Т.3.б. се најпре на основу аксиома А.3.а. уместо $a \cdot 0$ пише $(a \cdot 0) + 0$, тако да се добија

$$a \cdot 0 = (a \cdot 0) + 0$$

Затим се на основу аксиома А.4.б. уместо 0 пише $(a \cdot \bar{a})$, тако да се добија

$$a \cdot 0 = (a \cdot 0) + (a \cdot \bar{a})$$

Потом се на основу аксиома А.5.а. уместо $(a \cdot 0) + (a \cdot \bar{a})$ пише $a \cdot (0 + \bar{a})$, тако да се добија

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + \bar{a})$$

Даље се на основу аксиома А.3.а. уместо $(0 + \bar{a})$ пише $\bar{a}$, тако да се добија

$$a \cdot 0 = a \cdot \bar{a}$$

На крају се на основу аксиома А.4.б. уместо $a \cdot \bar{a}$ пише 0, тако да се добија

$$a \cdot 0 = 0$$

Тиме је теорема Т.3.б. доказана.

Теорема Т.3.а. је дата релацијом $a + 1 = 1$, док је теорема Т.3.б. дата релацијом $a \cdot 0 = 0$. У релацији $a \cdot 0 = 0$ за теорему Т.3.б. се појављују Булови изрази који су дуални Буловим изразима у релацији $a + 1 = 1$ за теорему Т.3.а. Стога се доказ теореме Т.3.а. $a + 1 = 1$ може искористити да се дуалном супституцијом докаже и теорема Т.3.б. $a \cdot 0 = 0$. У доказу теореме $a + 1 = 1$ треба задржати симбол елемента а, а уместо симбола операције "+" ставити симбол операције "." и обрнуто и уместо симбола константе "1" ставити симбол константе "0".

Овим поступком се уместо $a + 1 = (a + 1) \cdot 1$ добија $a \cdot 0 = (a \cdot 0) + 0$.

Затим се уместо $a + 1 = (a + 1) \cdot (a + \bar{a})$ добија $a \cdot 0 = (a \cdot 0) + (a \cdot \bar{a})$.

Потом се уместо $a + 1 = a + (1 \cdot \bar{a})$ добија $a \cdot 0 = a \cdot (0 + \bar{a})$.

Даље се уместо $a + 1 = a + \bar{a}$ добија $a \cdot 0 = a \cdot \bar{a}$.

На крају се уместо $a + 1 = 1$ добија $a \cdot 0 = 0$.

Теорема Т.4. (Де Морганова (de Morgan) теорема) У Буловој алгебри вреди

Т.4. а. $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ и

Т.4. б. $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

Код доказа теореме Т.4.а. се доказује да вреди релација

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = 1$$

из чега на основу аксиома А.4.а. следи да су $a + b$ и $\bar{a} \cdot \bar{b}$ комплементи. Најпре се на основу аксиома А.5.б. уместо $a + b + \bar{a} \cdot \bar{b}$ пише $(a + b + \bar{a}) \cdot (a + b + \bar{b})$, тако да је

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = (a + b + \bar{a}) \cdot (a + b + \bar{b})$$

Затим се на основу аксиома А.2.а. уместо $(a + b + \bar{a})$ пише $(b + a + \bar{a})$ и даље на основу аксиома А.3.а. уместо $(b + a + \bar{a})$ пише $(b + 1)$ и уместо $(a + b + \bar{b})$ пише $(a + 1)$, тако да је

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = (b + 1) \cdot (a + 1)$$

Потом се на основу теореме Т.3.а. уместо $(b + 1)$ пише 1 и уместо $(a + 1)$ пише 1, тако да је

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 1$$

На крају се на основу аксиома А.3.б. уместо $1 \cdot 1$ пише 1, тако да је

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = 1$$

Тиме је теорема Т.4.а. доказана.

Код доказа теореме Т.4. б. се доказује да вреди релација

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = 0$$

из чега на основу аксиома А.4.б. следи да су $a \cdot b$ и $\bar{a} + \bar{b}$ комплементи. Најпре се на основу аксиома А.5.а. уместо $a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b})$ пише $a \cdot b \cdot \bar{a} + a \cdot b \cdot \bar{b}$, тако да је

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = a \cdot b \cdot \bar{a} + a \cdot b \cdot \bar{b}$$

Затим се на основу аксиома А.2.б. уместо $a \cdot b \cdot \bar{a}$ пише $b \cdot a \cdot \bar{a}$ и даље на основу аксиома А.3.б. уместо $b \cdot a \cdot \bar{a}$ пише $b \cdot 0$ и уместо $a \cdot b \cdot \bar{b}$ пише $a \cdot 0$, тако да је

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = b \cdot 0 + a \cdot 0$$

Потом се на основу теореме Т.3.б. уместо $b \cdot 0$ пише 0 и уместо $a \cdot 0$ пише 0 , тако да је

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = 0 + 0$$

На крају се на основу аксиома А.3.а. уместо $0 + 0$ пише 0 , тако да је

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = 0$$

Тиме је теорема Т.4.б. доказана.

Теорема Т.5. У Буловој алгебри вреди

$$\text{Т.5. а. } a + a \cdot b = a + b$$

$$\text{Т.5.б. } a \cdot (a + b) = a \cdot b$$

Код доказа теореме Т.5.а. се најпре на основу аксиома А.5.б. уместо $a + \bar{a} \cdot b$ пише $(a + \bar{a}) \cdot (a + b)$, тако да се добија

$$a + \bar{a} \cdot b = (a + \bar{a}) \cdot (a + b)$$

Затим се на основу аксиома А.4.а. уместо $(a + \bar{a})$ пише 1 , тако да се добија

$$a + \bar{a} \cdot b = 1 \cdot (a + b)$$

На крају се на основу аксиома А.3.а. уместо $1 \cdot (a + b)$ пише $(a + b)$, тако да је

$$a + \bar{a} \cdot b = a + b$$

Тиме је теорема Т.5.а. доказана.

Код доказа теореме Т.5.б. се најпре на основу аксиома А.5.а. уместо $a \cdot (\bar{a} + b)$ пише $a \cdot \bar{a} + a \cdot b$, тако да се добија

$$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot \bar{a} + a \cdot b$$

Затим се на основу аксиома А.4.б. уместо $a \cdot \bar{a}$ пише 0 , тако да се добија

$$a \cdot (\bar{a} + b) = 0 + a \cdot b$$

На крају се на основу аксиома А.3.б. уместо $0 + a \cdot b$ пише $a \cdot b$, тако да је

$$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$$

Тиме је теорема Т.5.б. доказана.

Теорема Т.6. У Буловој алгебри вреди

$$\text{Т.6. а. } a + a = a$$

$$\text{Т.6.б. } a \cdot a = a$$

Код доказа теореме Т.6.а. се најпре на основу аксиома А.3.б. уместо $a + a$ пише $(a + a) \cdot 1$, тако да се добија

$$a + a = (a + a) \cdot 1$$

Затим се на основу аксиома А.4.а. уместо 1 пише $(a + \bar{a})$, тако да се добија

$$a + a = (a + a) \cdot 1 = (a + a) \cdot (a + \bar{a})$$

Потом се на основу аксиома А.5.б. уместо $(a + a) \cdot (a + \bar{a})$ пише $a + a \cdot \bar{a}$, тако да се добија

$$a + a = a + a \cdot \bar{a}$$

Даље се на основу аксиома А.4.б. уместо $a \cdot \bar{a}$ пише 0 , тако да се добија

$$a + a = a + 0$$

На крају се на основу аксиома А.3.а. уместо $a + 0$ пише a , тако да се добија

$$a + a = a$$

Тиме је теорема Т.6.а. доказана.

Код доказа теореме Т.6.б. се најпре на основу аксиома А.3.а. уместо $a \cdot a$ пише $a \cdot a + 0$, тако да се добија

$$a \cdot a = a \cdot a + 0$$

Затим се на основу аксиома А.4.а. уместо 0 пише $a \cdot \bar{a}$, тако да се добија

$$a \cdot a = a \cdot a + a \cdot \bar{a}$$

Потом се на основу аксиома А.5.а. уместо $a \cdot a + a \cdot \bar{a}$ пише $a \cdot (a + \bar{a})$, тако да се добија

$$a \cdot a = a \cdot (a + \bar{a})$$

Даље се на основу аксиома А.4.а. уместо $(a + \bar{a})$ пише 1, тако да се добија

$$a \cdot a = a \cdot 1$$

На крају се на основу аксиома А.3.б. уместо $a \cdot 1$ пише a , тако да се добија

$$a \cdot a = a$$

Тиме је теорема Т.6.б. доказана.

Ове теореме се користе равноправно са аксиомама при трансформацији Булових израза.

1.3 БУЛОВА АЛГЕБРА НА СКУПУ СА ДВА ЕЛЕМЕНТА

Булова алгебра се може дефинисати само на скупу у којем је број елемената $n=2^m$, где је m природан број. Међутим, са аспекта представљања прекидачких функција Буловим изразима практичан значај има само Булова алгебра на скупу од два елемента, па ће она бити предмет даљих разматрања. Та два елемента морају да буду елементи 0 и 1, јер представљају неутралне елементе за операције "+" и "·", респективно. Ако се на скупу {0, 1} дефинишу операције "-", "+", "·" према таблицама са слике 1, онда ће добијена структура представљати Булову алгебру ако операције задовољавају аксиоме-постулате из одељка 1.1.

-	0	1
	1	0

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Слика 1 Операције "-", "+", "·" и "·".

То се може показати уврштавањем свих могућих комбинација елемената скупа {0, 1} у релације које представљају аксиоме Булове алгебре и израчунавањем вредности сагласно датим таблицама. Овај начин доказивања је крајње једноставан али прилично заморан, па ће поступак доказивања бити илустрован само провером закона асоцијативности за операцију "+". У релацији

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

се појављују три елемента, што значи да проверу треба извршити за $2^3 = 8$ комбинација вредности тих елемената.

Користећи таблицу за операцију "+" са слике 1 израчунава се:

1. Комбинација: $a = 0, b = 0, c = 0$;

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c, \\ 0 + (0 + 0) &= (0 + 0) + 0, \\ 0 + 0 &= 0 + 0, \\ 0 &= 0; \end{aligned}$$

2. Комбинација: $a = 0, b = 0, c = 1$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$0 + (0 + 1) = (0 + 0) + 1,$$

$$0 + 1 = 0 + 1,$$

$$1 = 1;$$

3. Комбинација: $a = 0, b = 1, c = 0$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0,$$

$$0 + 1 = 1 + 0,$$

$$1 = 1;$$

4. Комбинација: $a = 0, b = 1, c = 1$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$0 + (1 + 1) = (0 + 1) + 1,$$

$$0 + 1 = 1 + 1,$$

$$1 = 1;$$

5. Комбинација: $a = 1, b = 0, c = 0$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$1 + (0 + 0) = (1 + 0) + 0,$$

$$1 + 0 = 1 + 0,$$

$$1 = 1;$$

6. Комбинација: $a = 1, b = 0, c = 1$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$1 + (0 + 1) = (1 + 0) + 1,$$

$$1 + 1 = 1 + 1,$$

$$1 = 1;$$

7. Комбинација: $a = 1, b = 1, c = 0$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$1 + (1 + 0) = (1 + 1) + 0,$$

$$1 + 1 = 1 + 0,$$

$$1 = 1;$$

8. Комбинација: $a = 1, b = 1, c = 1$;

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1,$$

$$1 + 1 = 1 + 1,$$

$$1 = 1;$$

Овим је доказано да закон асоцијативности вреди за операцију $+$ дефинисану таблицом са слике 1. На исти начин би се могло доказати да и остале релације које се појављују у аксиомама Булове алгебре вреде за операције $-$, $+$ и $\cdot$ дефинисане таблицама са слике 1. Овај начин доказивања се назива метода исцрпљивања свих могућих случајева или перфектна индукција.

Булова алгебра на скупу од два елемента се често назива прекидачка алгебра. Назив долази од практичне примене Булове алгебре на скупу од два елемента за представљање прекидачких функција које се користе при пројектовању прекидачких мрежа. За операције $-$, $+$ и $\cdot$ се у прекидачкој алгебри често користе и називи негација, дисјункција и конјункција, респективно.