DRŽAVNI UNIVERZITET U NOVOM PAZARU
DEPARTMAN ZA MATEMATIČKE NAUKE

Diana Dolićanin Đekić **Dženis Pučić**
Emir Zogić **Edin Glogić**
Enes Kačapor **Lejlija Memić**

Ćemal Dolićanin

Zbirka rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima
I

Algebarski izrazi *Kompleksni brojevi*
Ekvivalentne jednačine i nejednačine *Trigonometrija*

Novi Pazar
2019

Diana Dolićanin Đekić
Dženis Pučić
Emir Zogić
Edin Glogić
Enes Kačapor
Lejlija Memić
Ćemal Dolićanin

Zbirka rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima I

Recenzenti

dr Nenad Cakić, redovni profesor Državnog univerziteta u Novom Pazaru
Dragan Jovanović, profesor matematike u Gimnaziji iz Kraljeva
Hajro Zogić, profesor matematike u Gimnaziji iz Novog Pazara

Izdavači
Državni univerzitet u Novom Pazaru
Akademska misao, Beograd

Za izdavača
prof. dr Miladin Kostić, rektor

Štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž 200

ISBN 978-86-86893-89-5

ISBN 978-86-86893-91-8 (niz)

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka namenjena je prvenstveno kandidatima koji se pripremaju za polaganje prijemnog ispita iz matematike radi upisa na fakultete, ali i učenicima srednjih škola i studentima, koji kao predmet imaju Elementarnu matematiku i inače, u cilju lakšeg savladavanja najznačajnijih oblasti srednjoškolske matematike. *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima, deo I* predstavlja celinu sa drugim delom istoimene zbirke, tj. sa *Zbirkom rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima, deo II.*

Zbirka je podeljena na 4 poglavlja. Svako poglavlje je podeljeno na kratke, po poglavljima, teorijske uvode i zadatke. U okviru teorijskog uvoda u svakom poglavlju date su osnovne teorijske činjenice koje su ilustrovane primerima, a u cilju boljeg razumevanja. Zadaci u zbirci su dati u formatu zadataka koji se postavljaju na prijemnim ispitima sa ponuđenim odgovorima. Karakteristika ove zbirke je u tome što je svaki zadatak detaljno rešen.

Ovom prilikom zahvaljujemo se svima koji su doprineli kvalitetu zbirke, a posebno se zahvaljujemo recenzentima dr Nenadu Cakiću, redovnom profesoru Državnog univerziteta u Novom Pazaru, Draganu Jovanoviću, profesoru matematike Gimnazije u Kraljevu, i Hajru Zogiću, profesoru matematike Gimnazije u Novom Pazaru, koji su dali niz značajnih primedbi i time veoma unapredili kvalitet ove zbirke.

Posebno se zahvaljujemo rektoru Državnog univerziteta u Novom Pazaru, prof. dr Miladinu Kostiću, što je prihvatio inicijativu za pripremu i izdavanje ove zbirke.

U Novom Pazaru, 15.03.2019. *Autori*

Glava 1

Algebarski izrazi

U mnogim granama matematike često se susrećemo sa pojmom algebarskog izraza. Tako na primer, izraz $\frac{ab}{2}$ predstavlja formulu za računanje površine pravouglog trougla čije su katete a i b, itd.

U ovom poglavlju proučavaćemo algebarske izraze, tj. izraze u kojima učestvuju operacije sabiranja, oduzimanja, množenja (samim tim i stepenovanja) i deljenja. Na početku, dajemo definiciju algebarskog izraza.

Definicija 1. *1. Simboli realnih brojeva:* $2, 5, -3, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots$ *su algebarski izrazi.*

2. Simboli promenljivih: $x, y, z, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *su algebarski izrazi.*

3. Ako su A *i* B *algebarski izrazi, onda su i* $(A+B)$, $(A-B)$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$ *algebarski izrazi (pritom usvajamo uobičajene konvencije o brisanju* *zagrada kad one nisu neophodne, a kod količnika pretpostavljamo da je $B \neq 0$).*

4. Algebarski izrazi se mogu dobiti samo primenom pravila 1, 2. i 3.

1.1 Rastavljanje polinoma na činioce

Predstavićemo kroz primere neke transformacije algebarskih izraza koristeći svojstva algebarskih operacija čime dovodimo dati izraz na oblik koji nam je za određenu svrhu najpogodniji. U nastavku bavimo se izrazima u čijem formiranju ne učestvuje operacija deljenja, osim konstantom, pri čemu takve izraze nazivamo polinomima.

Distributivni zakon. Za izraze A, B i C važi

$$AB + AC = A(B + C).$$

Svako rastavljanje polinoma na činioce treba započeti uviđanjem mogućnosti primene navedenog distributivnog zakona.

Primer 1.1.1. *1.* $x^2 + 2x = x(x + 2)$,

2. $x^2 - x = x(x - 1)$,

3. $4ax^2 + 8ax - 12ax^3 = 4ax(x + 2 - 3x^2)$,

4. $45a^2bx^4 - 30a^3b^3x^3 - 15a^2b^2x^3 + 60a^3x^4 = 15a^2x^3(3bx - 2ab^3 - b^2 + 4ax)$,

5. $(x + y)a + (x + y)b = (x + y)(a + b)$,

6. $y - x = -(x - y)$,

7. $3x(x-y)-2y(y-x) = 3x(x-y)+2y(x-y) = (x-y)(3x+2y)$,

8. $4a(a-b)+(b-a)2b-5c(a-b) = 4a(a-b)-(a-b)2b-5c(a-b) = (a-b)(4a-2b-5c)$.

Grupisanje članova. Kada u polinomu ne možemo izvući zajednički faktor, onda možemo pokušati u prvom koraku da grupišemo članove (sabirke) i da na te grupe članova primenimo distributivni zakon.

Primer 1.1.2. $4a^2 - ab - 20ac + 5bc = a(4a-b) - 5c(4a-b) = (4a-b)(a-5c)$.

Kvadrat binoma. Ako su A i B izrazi, tada je

- $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$,
- $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$.

Primer 1.1.3. *1.* $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = (x-3)^2$,

2. $25x^2 + 10x + 1 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1^2 = (5x+1)^2$.

Razlika kvadrata. Ako su A i B izrazi, tada je

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B).$$

Primer 1.1.4. *1.* $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$, *2.* $25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x-9)(5x+9)$,

3. $16x^4 - 81 = (4x^2)^2 - 9^2 = (4x^2-9)(4x^2+9) = (2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$.

Zbir i razlika kubova. Za izraze A i B važi

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2),$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

Primer 1.1.5. *1.* $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$,

2. $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$,

3. $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$.

Kub binoma. Za izraze A i B važi

$$A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3.$$

U narednom primeru pokazaćemo rastavljanje polinoma na činioce kombinovanjem prethodno navedenih transformacija.

Primer 1.1.6. *1.* $3a^2 - 3b^2 = 3(a^2 - b^2) = 3(a-b)(a+b)$,

2. $ax^2 - 2ax + a = a(x^2 - 2x + 1) = a(x-1)^2$,

3. $x^2 - 1 - xy + y = (x-1)(x+1) - y(x-1) = (x-1)(x+1-y)$,

4. $x^4 + x^3 - x^2 + 1 = x^3(x+1) - (x^2-1) = x^3(x+1) - (x-1)(x+1) = (x+1)(x^3 - x + 1)$.

5.

$$\begin{aligned}
& ac(a+c)-bc(b+c)+ab(a-b) \\
= \;& a^2c+ac^2-b^2c-bc^2+ab(a-b) \\
= \;& c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b) \\
= \;& c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)+ab(a-b) \\
= \;& (a-b)(ac+bc+c^2+ab) \\
= \;& (a-b)(a(b+c)+c(b+c)) \\
= \;& (a-b)(b+c)(a+c).
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc \\
= \;& a(b^2+2bc+c^2)+b(a^2+2ac+c^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc \\
= \;& ab^2+2abc+ac^2+a^2b+2abc+bc^2+a^2c+2abc+b^2c-4abc \\
= \;& ab^2+abc+abc+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c \\
= \;& ab(b+c)+ac(b+c)+a^2(b+c)+bc(b+c) \\
= \;& (b+c)(ab+ac+a^2+bc) \\
= \;& (b+c)(a(a+b)+c(a+b)) \\
= \;& (b+c)(a+b)(a+c)
\end{aligned}$$

7. Za rastavljanje kvadratnog trinoma može se koristiti formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$*, gde je* $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned}
& (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 \\
= \;& (x^2+7x+x+7)(x^2+5x+3x+15)+15 \\
= \;& (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t(t+8)+15, \ \textit{gde je}\, x^2+8x+7=t \\
&= t^2+8t+15 \\
&= (t+3)(t+5), \ \textit{gde je}\, t_1=-3, t_2=-1 \\
&= (x^2+8x+7+3)(x^2+8x+7+5) \\
&= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) \\
&= (x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})(x+2)(x+6).
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
& x^4+x^2+1 \\
&= x^4+2x^2+1-x^2 \\
&= (x^2+1)^2-x^2 \\
&= (x^2+1-x)(x^2+1+x) \\
&= (x^2-x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

Bezuov stav. Ostatak deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $x-a$ je $P(a)$.

Posledica Bezuovog stava. Polinom $P(x)$ je deljiv polinomom $x-a$ ako je $P(a)=0$.

Hornerova šema. Neka je dat polinom $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. Tada je $P(x)=(x-x_0)Q(x)+P(x_0)$, pri čemu je $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_kx^{n-(k+1)}+b_{k+1}x^{n-(k+2)}+\cdots+b_{n-1}$ količnik deljenja polinoma $P(x)$ sa $x-x_0$, a $P(x_0)$ se dobija kao ostatak tog deljenja. Za efektno određivanje koeficijenata $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$, tj. za deljenje polinoma $P(x)$ polinomom $x-x_0$ korisno je upotrebiti Hornerovu šemu koja se obrazuje na sledeći način. Iz $P(x)=(x-x_0)Q(x)+P(x_0)$, tj. iz

$$
\begin{aligned}
a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n &= (x-x_0)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+ \\
&\cdots +b_kx^{n-(k+1)}+b_{k+1}x^{n-(k+2)}+ \\
&\cdots +b_{n-1})+P(x_0),
\end{aligned}
$$

dobija se $b_0 = a_0, b_1 = x_0b_0 + a_1, \ldots, b_{k+1} = x_0b_k + a_{k+1}, ..., P(x_0) = x_0b_{n-1} + a_n$.

Poslednje formule se mogu napisati u vidu šeme koja predstavlja Hornerovu šemu:

a_0	a_1	a_{k+1}	a_n
$a_0 = b_0$	$x_0b_0 + a_1 = b_1$	$x_0b_k + a_{k+1} = b_{k+1}$	$x_0b_{n-1} + a_n = P(x_0)$

Primer 1.1.7. *Primenjujući Hornerovu šemu naći ostatak deljenja polinoma* $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ *polinomom* $x - 3$.

Rešenje. Unesimo koeficijente polinoma $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ u prvu vrstu sledeće tabele:

2	-3	3	-4	-5
2	3	12	32	91

Brojeve u drugoj vrsti poslednje tabele dobili smo na sledeći način: broj 2 je prepisan iz prve vrste, a zatim $3 \cdot 2 - 3 = 3$ je sledeći broj, zatim $3 \cdot 3 + 3 = 12$, $3 \cdot 12 - 4 = 32$, $3 \cdot 32 - 5 = 91$.

Iz tabele zaključujemo da traženi ostatak iznosi 91.

Primer 1.1.8. *U polinomu* $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + px + q$ *odrediti parametre* p *i* q *tako da on bude deljiv sa* $x^2 - x - 2$.

Rešenje. I način. Rastavimo polinom $x^2 - x - 2$ kao $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, gde je $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$.

Sada iz $P(2) = 0$ i $P(-1) = 0$ dobijamo sistem

$$2^4 + 2^3 - 2^2 + 2p + q = 0,$$

$$(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 - p + q = 0,$$

odakle je

$$2p + q = -20,$$

$$-p + q = 1,$$

pa je $p = -7$ i $q = -6$.

II način. S obzirom na to da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $x^2 - x - 2$, sledi da je

$$x^4 + x^3 - x^2 + px + q = (x^2 - x - 2)(x^2 + ax + b),$$

odakle je

$$x^3 - x^2 + px + q = (a-1)x^3 + (b - a - 2)x^2 + (-b - 2a)x - 2b.$$

Iz poslednje jednakosti, izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata, dobijamo sistem

$$\begin{aligned} a - 1 &= 1 \\ b - a - 2 &= -1 \\ -b - 2a &= p \\ -2b &= q, \end{aligned}$$

odakle je $a = 2, b = 3, p = -7, q = -6$.

Primer 1.1.9. *Rastaviti polinom $P(x)$ na činioce, gde je $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$.*

Rešenje. Racionalne nule datog polinoma tražimo među deliocima slobodnog člana 12: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Proverom utvrđujemo da su racionalne nule datog polinoma -1 i 2. Sastavljanjem Hornerove šeme

1	-2	-7	8	12
1	-3	-4	12	0
1	-1	-6	0	0

zaključujemo da je $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2-x-6)$, odakle rastavljanjem trinoma $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, zaključujemo da je $P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

1.2 Skraćivanje razlomaka

Skratiti razlomak znači podeliti brojilac i imenilac istim brojem (različitim od nule, naravno).

Primer 1.2.1. *1.* $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$,

2. $\dfrac{4ab}{6a^2b} = \dfrac{2}{3a} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$,

3. $\dfrac{a(x+2)^2}{2a^2(x+2)} = \dfrac{x+2}{2a} \quad (a \neq 0,\ x \neq -2)$,

4. $\dfrac{x(a+b)}{2ax+2bx} = \dfrac{x(a+b)}{2x(a+b)} = \dfrac{1}{2} \quad (x \neq 0,\ a \neq -b)$,