

Ljiljana Milić
Zoran Dobrosavljević
Jelena Čertić

UVOD U DIGITALNU OBRADU SIGNALA

Akadska misao
Beograd, 2015.

Ljiljana Milić, Zoran Dobrosavljević, Jelena Čertić

UVOD U DIGITALNU OBRADU SIGNALA

Recenzenti

Dr Miodrag Popović

Dr Irini Reljin

Odlukom Nastavno-naučnog veća Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, koja je doneta na 788. sednici 10.07.2015. godine, odobreno je štampanje ovog udžbenika.

Izdaje i štampa

AKADEMSKA MISAO, Beograd

Dizajn naslovne strane

Zorica Marković, akademski slikar

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-558-9

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige u celini ili u delovima nije dozvoljeno bez izričite saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

Predgovor

Digitalna obrada signala se naglo razvila u poslednjih nekoliko decenija. Napredak je impresivan kako u teoriji tako i u domenu primene. Razvoj digitalne obrade signala povezan je sa prodorima koji su ostvareni u mikroelektronici i računarskim i softverskim tehnologijama. Zahvaljujući tom ukupnom napretku, razvoj savremenih sistema se zasniva uglavnom na digitalnoj tehnologiji. Digitalna obrada signala predstavlja osnovnu tehnologiju za mnoge grane tehnike kao što su: telekomunikacioni sistemi, mobilne komunikacije, radar, multimedija, obrada govora, audiotehnika, sonarna tehnika, obrada slike, medicinska elektronika, seizmologija, tehnike merenja i upravljanja, robotika, kartografija i mnoge druge.

Kao rezultat važnosti naučne oblasti, ali i kao rezultat praktičnih potreba, nastava iz digitalne obrade signala postala je obavezna u okviru studija elektrotehnike i računarstva na skoro svim univerzitetima u svetu. Pored toga, digitalna obrada signala je uključena kao deo studijskih programa u oblastima koje u značajnoj meri koriste informacione tehnologije.

Posebna lepota digitalne obrade signala je u bliskoj povezanosti teorije i prakse. Ta činjenica ukazuje na potrebu da se i u nastavi uspostavi ravnoteža između teorije i njene primene. Softverske tehnologije pružaju mogućnost da se već u toku upoznavanja sa osnovnim algoritmima digitalne obrade signala stečeno znanje kreativno primenjuje u rešavanju praktičnih problema. Ovaj pristup je veoma popularan u savremenoj nastavi.

Digitalna obrada signala je oblast koja obuhvata širok spektar znanja i praktično je nemoguće da je pojedinac savlada u celini. Da bi se u oblasti digitalne obrade signala započeo uspešan rad i da bi se zatim dalje napredovalo, pre svega je neophodno temeljno poznavanje njenih osnova. Kasniji istraživački i razvojni rad, kao i profesionalna inženjerska praksa, podrazumevaju neprekidno nastavljanje učenja novog.

Prilikom izrade knjige "Uvod u digitalnu obradu signala" autori su težili da uspostave ravnotežu između izlaganja teorijskih postavki oblasti, sa jedne strane, i ilustracije izložene teorije sa naglašavanjem praktične primene, sa druge strane. Teorijska izlaganja su ilustrovana velikim brojem rešenih primera. Na kraju svake glave dati su zadaci za rad na računaru koji imaju ulogu da podstaknu čitaoca na samostalnu potvrdu teorijskih postavki izloženih u tekstu. Za jedan broj reprezentativnih zadataka u knjizi su data rešenja sa komentarima, pri čemu je primenjen softverski paket MATLAB® koji je u ovoj knjizi korišćen sa odobrenjem proizvođača MathWorks™. Reč je o poznatom alatu za rad u digitalnoj obradi signala koji je primenjen sa ciljem da se kroz zadatke čitalac istovremeno upozna i sa osnovama alata koji se koristi u praksi.

Tekst knjige je podeljen u jedanaest glava i dva dodatka u kojima je obrađeno: predstavljanje diskretnih signala i sistema u vremenskom i frekvencijskom domenu, z-transformacija, diskretizacija kontinualnih signala, diskretna Furijeova transformacija

(DFT) i brza Furijeova transformacija (FFT), funkcija prenosa i frekvencijski odziv linearnih vremenski invarijantnih sistema, digitalni filtri beskonačnog impulsnog odziva (IIR digitalni filtri), digitalni filtri konačnog impulsnog odziva (FIR digitalni filtri), realizacione strukture diskretnih sistema, diskretni slučajni signali i softverska implementacija sistema digitalne obrade signala primenom programskog paketa MATLAB®.

Knjiga pod naslovom "Uvod u digitalnu obradu signala" autora Ljiljane Milić i Zorana Dobrosavljevića u izdanju Akademske misli pojavila se prvi put krajem 1999. godine i do sada je imala ukupno četiri izdanja. Sada je pred čitaocima nova knjiga pod istim naslovom čiji su autori Ljiljana Milić, Zoran Dobrosavljević i Jelena Čertić. U novu knjigu, autori su uneli iskustvo stečeno u nastavi, u saradnji sa studentima i inženjerima iz prakse. Osim toga, softverski paket MATLAB je evoluirao tokom vremena što je zahtevalo da se delovi teksta koji su se odnosili na softver kao i primeri namenjeni za vežbu modernizuju i usklade sa novim verzijama softvera.

Knjiga "Uvod u digitalnu obradu signala" dopunjena je Zbirkom rešenih zadataka u programskom jeziku MATLAB® koja je data u elektronskoj formi na kompakt disku. Autori su Jelena Čertić i Dragana Šumarac Pavlović, predmetni nastavnici za digitalnu obradu signala na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Pored rešenja za zadatke koji su postavljeni na kraju svake glave u knjizi, kompakt disk sadrži i poseban softverski alat: Paket za osnovnu obuku iz obrade signala – 3oS koji je takođe izrađen u MATLAB®-u. Cilj je da se kroz korišćenje datog softvera, kako rešenja zadataka, tako i paketa 3oS, čitalac podstakne na samostalan kreativan rad.

Knjiga "Uvod u digitalnu obradu signala" je prvenstveno namenjena studentima osnovnih studija, ali može da bude korisna i svima ostalima koji su za ovu oblast zainteresovani, posebno stručnjacima i istraživačima koji u toku studija nisu imali prilike da savladaju ovu za savremenu nauku i inženjersku praksu veoma značajnu oblast.

Ovom prilikom, autori zahvaljuju kolegama i studentima koji su sugestijama, zapažanjima i primedbama pomogli da se poboljšaju i prošire delovi teksta i otklone neki od nedostataka. Posebnu zahvalnost autori duguju recenzentima Miodragu Popoviću i Irini Reljin, redovnim profesorima Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, za temeljitu analizu i stručnu ocenu podnetog materijala.

Beograd, septembar 2015.

Autori

Sadržaj

1. Diskretni signali i sistemi: analiza u vremenskom domenu	1
1.1 Uvod.....	1
1.2 Diskretni signali i nizovi.....	2
1.2.1 Računske operacije sa nizovima	4
1.2.2 Elementarni signali	4
1.3 Diskretni sistemi	10
1.3.1 Linearni vremenski invarijantni sistemi.....	14
1.3.2 Stabilnost i kauzalnost linearnih vremenski invarijantnih sistema.....	17
1.3.3 Linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima	19
1.3.4 Predstavljanje diskretnih sistema pomoću blok dijagrama	21
Zadaci za rad na računaru	23
2. Analiza diskretnih signala i sistema u frekvencijskom domenu: Furijeova transformacija.....	27
2.1 Uvod.....	27
2.2 Odziv linearnog, vremenski invarijantnog sistema na kompleksni eksponencijalni signal	28
2.3 Furijeova transformacija diskretnih signala	31
2.4 Osobine Furijeove transformacije	32
2.5 Konvolucija.....	42
2.5.1 Konvolucija u vremenskom domenu, konvoluciona teorema	42
2.5.2 Konvolucija u frekvencijskom domenu, Furijeova transformacija proizvoda dva niza	44
2.6 Parsevalova teorema	45
Zadaci za rad na računaru	47
3. Z transformacija.....	51
3.1 Uvod.....	51
3.2 Definicija z transformacije	51
3.3 Oblast konvergencije.....	53
3.4 Inverzna z transformacija	59
3.5 Osobine z transformacije.....	65

3.6	Konvolucija.....	67
3.6.1	Konvolucija nizova.....	67
3.6.2	Kompleksna konvoluciona teorema.....	69
3.7	Parsevalova teorema.....	71
	Zadaci za rad na računaru.....	73
4.	Digitalna obrada kontinualnih signala.....	77
4.1	Uvod.....	77
4.2	Diskretizacija kontinualnog signala.....	77
4.2.1	Predstavljanje procesa odabiranja u frekvencijskom domenu.....	80
4.2.2	Teorema o odabiranju.....	85
4.3	Rekonstrukcija frekvencijski ograničenog signala iz njegovih odbiraka.....	87
4.4	Ekvivalentni analogni filter.....	91
4.5	Realni sistemi za diskretizaciju i rekonstrukciju signala.....	93
4.5.1	Ograničenje spektra ulaznog signala.....	94
4.5.2	Analogno-digitalna konverzija.....	95
4.5.3	Digitalno-analogna konverzija.....	106
4.5.4	Ograničenje spektra izlaznog signala.....	107
5.	Diskretna Furijeova transformacija.....	109
5.1	Uvod.....	109
5.2	Definicija DFT.....	110
5.3	Predstavljanje i izračunavanje DFT.....	113
5.4	Rotacioni faktori, matrični oblik DFT, ortogonalnost.....	119
5.5	Odnos DFT prema drugim transformacijama.....	122
5.6	Osobine DFT.....	124
5.7	Ciklična konvolucija.....	129
5.8	Parsevalova teorema.....	133
5.9	Analiza signala primenom DFT.....	133
	Zadaci za rad na računaru.....	140
6.	Brza Furijeova transformacija.....	145
6.1	Uvod.....	145
6.2	Složenost izračunavanja DFT, princip dekompozicije.....	146
6.3	FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu.....	148
6.4	FFT algoritam sa razbijanjem po frekvenciji.....	155
6.5	Efikasnost FFT algoritma.....	157
6.6	Prekoračenje opsega kod FFT algoritma.....	159

7. Linearni vremenski invarijantni sistemi: funkcija prenosa i frekvencijski odziv.....	161
7.1 Uvod.....	161
7.2 Funkcija prenosa diskretnog sistema	162
7.2.1 Definicija funkcije prenosa	162
7.2.2 Funkcija prenosa sistema predstavljenog diferencnom jednačinom.....	163
7.3 Nule i polovi funkcije prenosa	165
7.4 Stabilnost i kauzalnost	167
7.5 Frekvencijski odziv	168
7.5.1 Definicija frekvencijskog odziva	168
7.5.2 Uticaj nula i polova funkcije prenosa na frekvencijske karakteristike.....	171
7.5.3 Karakteristike idealnog filtra	173
7.5.4 Idealni diferencijator i Hilbertov transformator.....	175
7.5.5 Ostvarive karakteristike diskretnih sistema	177
7.6 Funkcija prenosa linearne faze.....	179
7.7 Propusnik svih frekvencija.....	182
7.8 Funkcija prenosa minimalne faze.....	185
7.9 Postupak projektovanja linearnih vremenski invarijantnih sistema	190
Zadaci za rad na računaru	191
8. Digitalni filtri beskonačnog impulsnog odziva (IIR).....	197
8.1 Uvod.....	197
8.2 Specifikacije i osnovne definicije	198
8.3 Klasične funkcije prenosa analognih filtara	203
8.3.1 Batervortov filter.....	204
8.3.2 Čebiševljevi filter.....	206
8.3.3 Inverzni Čebiševljevi filter.....	208
8.3.4 Eliptički filter.....	210
8.3.5 Beselov filter.....	212
8.3.6 Frekvencijske transformacije analognih filtara	212
8.4 Analogno-digitalne transformacije.....	216
8.4.1 Impulsno invarijantna transformacija	216
8.4.2 Bilinearna transformacija.....	221
8.5 Frekvencijske transformacije digitalnih filtara.....	229
8.6 Korekcija fazne karakteristike.....	232
Zadaci za rad na računaru	236

9. Digitalni filtri konačnog impulsnog odziva (FIR)	243
9.1 Uvod.....	243
9.2 Specifikacije i osnovne definicije	244
9.3 FIR filtri linearne faze.....	246
9.4 Projektovanje FIR filtara primenom prozora	253
9.4.1 Primena prozora i modifikacija funkcije prenosa	253
9.4.2 Prozori sa nepromenljivim parametrima.....	256
9.4.3 Projektovanje FIR filtra propusnika niskih frekvencija	261
9.4.4 Projektovanje FIR filtara propusnika visokih frekvencija, propusnika opsega i nepropusnika opsega.....	265
9.4.5 Prozori sa promenljivim parametrima, Kajzerov prozor.....	268
9.5 Projektovanje FIR filtara zasnovano na frekvencijskom odabiranju.....	271
9.6 Kriterijumi aproksimacije	275
9.7 Optimalna aproksimacija FIR filtara linearne faze	277
Zadaci za rad na računaru	284
10. Realizacija digitalnih filtara	291
10.1 Uvod	291
10.2 Realizacione strukture IIR filtara.....	291
10.2.1 Direktna realizacija.....	292
10.2.2 Osetljivost na tačnost konstanti množenja.....	296
10.2.3 Filtarske sekcije prvog i drugog reda.....	298
10.2.4 Kaskadna realizacija	301
10.2.5 Paralelna realizacija	303
10.3 Realizacione strukture FIR filtara.....	305
10.3.1 Direktna realizacija.....	307
10.3.2 Kaskadna realizacija	309
10.3.3 Realizacija zasnovana na frekvencijskom odabiranju	310
10.4 Uticaj efekata konačne dužine reči na karakteristike filtra	311
10.4.1 Greške usled kvantizacije koeficijenata.....	313
10.4.2 Šum usled kvantizacije proizvoda	317
10.4.3 Prekoračenje opsega i skaliranje.....	321
10.4.4 Kombinovanje nula i polova i redosled sekcija kod kaskadne strukture.....	324
10.4.5 Granični ciklusi.....	325
Zadaci za rad na računaru	329

11. Softverska implementacija u MATLAB-u	333
11.1 Uvod	333
11.2 Softverska implementacija i simulacija	335
11.2.1 Implementacija diskretne Furijeove transformacije.....	335
11.2.2 Implementacija digitalnog filtriranja	338
11.3 Odabrani primeri	347
Zadaci za rad na računaru	357
Dodatak A: Diskretni slučajni signali.....	359
A.1 Srednja vrednost	360
A.2 Autokorelaciona funkcija.....	360
A.3 Ergodičnost.....	361
A.4 Srednja snaga i varijansa.....	361
A.5 Spektralna gustina snage.....	362
A.6 Uniformna i normalna raspodela.....	362
A.7 Šum kvantizacije.....	364
A.8 Odziv linearnog, vremenski invarijantnog sistema na pobudu slučajnim signalom.....	364
Dodatak B: Simboli i skraćenice	367
B.1 Rečnik simbola	367
B.2 Rečnik skraćenica	370
Literatura	371
Indeks pojmova	375

1. Diskretni signali i sistemi: analiza u vremenskom domenu

1.1 Uvod

Osnovni pojmovi koji se razmatraju u ovoj knjizi su *signali* i *sistemi*. Signal se može definisati kao funkcija jedne ili više nezavisno promenljivih. Govorni signal se, na primer, može predstaviti kao funkcija jedne nezavisne promenljive-vremena, a signal dobijen analizom slike kao funkcija dve prostorne koordinate.

U opštem slučaju, nezavisno promenljiva može biti bilo koja fizička veličina. Uzmimo za primer podatke zabeležene na magnetnoj traci. Ovi podaci mogu biti tumačeni kao signal koji je funkcija položaja na traci u odnosu na odabranu referentnu tačku. Ipak, najčešće je nezavisna promenljiva vreme, te je uobičajeno da se signali posmatraju kao funkcije vremena, čak i u slučajevima kada stvarna nezavisno promenljiva nije vreme.

Značaj signala je u tome da je on nosilac određene informacije. Sadržaj informacije koju signal nosi zapisan je u promenama funkcije ili nekog od njenih parametara, pa se signal prema tome može definisati kao funkcija vremena koja nosi informaciju o nekoj veličini od interesa.

Prema prirodi svoje nezavisno promenljive signali se mogu podeliti na kontinualne i diskretne. Pod *kontinualnim signalima* podrazumevamo one kod kojih je funkcija koja predstavlja signal neprekidna funkcija vremena. Ako pri tome amplituda signala može uzimati proizvoljnu vrednost iz dozvoljenog opsega, signal se naziva *analogni signal*. Za razliku od kontinualnih signala *diskretni signali* su definisani samo za diskretne vrednosti nezavisne promenljive vremena. Većina signala nastalih iz prirodnih izvora kao i većina veštački proizvedenih signala su analogni. Diskretni signali nastaju diskretizacijom analognih signala uz određene uslove ili se formiraju u diskretnom obliku kao, na primer, podaci o promenama neke fizičke veličine mereni u određenim trenucima, dnevni kursevi valuta, razni ekonomski pokazatelji i drugo. Amplituda diskretnog signala može biti kontinualna ili diskretna. Ukoliko je izvršena kvantizacija amplituda diskretnog signala dobijen je *digitalni signal*. U teoriji diskretnih signala i sistema podrazumeva se da je diskretizacija izvršena po vremenu a ne i po amplitudi. Efekti kvantizacije amplituda predmet su posebne analize.

Sistemi za obradu signala u opštem slučaju služe da transformišu jedan signal koji smatramo ulaznim u drugi, poželjniji oblik, koji smatramo izlaznim signalom. Analogni sistem pobuđen analognim signalom daje na izlazu analogni signal. Primer analognog

sistema je električna mreža koja zavisno od strukture mreže i vrednosti elemenata daje različite signale na svom izlazu. Diskretni sistem pobuđen diskretnim signalom daje na izlazu diskretni signal. Diskretni sistem se može primeniti i za obradu analognih signala, ako se prethodno pod određenim uslovima analogni signal diskretizuje. Diskretni sistemi se realizuju najčešće primenom digitalne tehnike ali se za tu svrhu ponekad koriste i druge tehnologije kod kojih se obrada zasniva na kontinualnim amplitudama signala diskretizovanih po vremenu kao što su na primer procesori zasnovani na tehnologiji površinsko akustičnih talasa (*surface acoustic wave* - SAW), poluprovodničkih elemenata sa prenosom opterećenja (*charge coupled devices* - CCD, *charge transfer devices* - CTD), ili prekidačko kapacitivnih elemenata (*switch-capacitor*, SC).

U ovoj glavi opisano je predstavljanje diskretnih signala i sistema u vremenskom domenu. Najpre je uveden način predstavljanja diskretnih signala i dati su neki karakteristični primeri. Zatim je prikazan postupak predstavljanja diskretnog sistema u vremenskom domenu. Data je definicija linearnog vremenski invarijantnog sistema. Uveden je pojam impulsnog odziva sistema i konvolucije. Definisani su uslovi kauzalnosti i stabilnosti. Pokazano je predstavljanje diskretnog sistema pomoću linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima i njena interpretacija pomoću blok dijagrama.

1.2 Diskretni signali i nizovi

Diskretni signali su definisani samo za diskretne vrednosti nezavisno promenljive vremena. Diskretizacija po vremenu (odabiranje) može biti izvršena uniformno i neuniformno. Najčešće se koristi uniformno odabiranje gde se odbirci signala pojavljuju u jednakim vremenskim intervalima, tj. $t=nT$, pri čemu je T perioda odabiranja signala, a n ceo broj. Neuniformno odabiranje znači da su rastojanja između odbiraka nejednaka. Pod pojmom *diskretni signal* podrazumevamo da je diskretizacija izvršena samo po vremenu a da su amplitude signala kontinualne, što znači da se proučavaju *vremenski diskretni signali*. Ipak, pojam *diskretni signali* je uobičajen pa će se koristiti i u ovoj knjizi.

Diskretni signali se matematički predstavljaju kao *nizovi brojeva* čije amplitude mogu uzimati kontinualne vrednosti. Niz označavamo sa

$$\{x[n]\}, N_1 \leq n \leq N_2. \quad (1.1a)$$

Vitičaste zagrade se koriste da označe niz u celini, a $x[n]$ označava n -ti član (element) niza. Granice niza N_1 i N_2 mogu biti konačne ili beskonačne. Dužina niza je $N_2 - N_1 + 1$, i može biti konačna ili beskonačna. Ako niz ima konačan broj članova, $\{x[n], n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$, može se predstaviti i kao vektor (matrica-kolona),

$$\mathbf{x}_N = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]^T, \quad (1.1b)$$

gde $[\cdot]^T$ označava operaciju transponovanja.

Diskretni signal je definisan samo za diskretne vrednosti nezavisno promenljive vremena a između ovih vrednosti nije definisan. Niz se može formirati na bezbroj načina. U primeru 1.1 pokazana su dva jednostavna načina za formiranje nizova, a na slici 1.1 data je grafička interpretacija dobijenih nizova.

Primer 1.1

(a) Generisati sledeći linearni niz:

$$0, 1, 2, \dots, N-1.$$

n -ti član ovoga niza je, očigledno,

$$x[n] = n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Grafička predstava ovoga niza data je na slici 1.1(a).

(b) Formirati diskretni niz pomoću sledeće rekursivne formule:

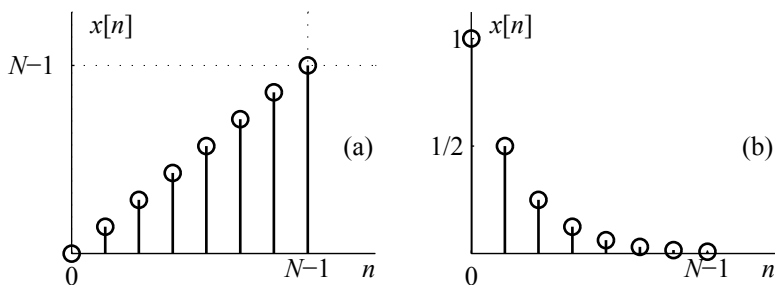
$$x[n] = x[n-1]/2 \text{ ako je } x[0] = 1.$$

n -ti član niza je

$$x[n] = (1/2)^n, \quad 0 \leq n < \infty.$$

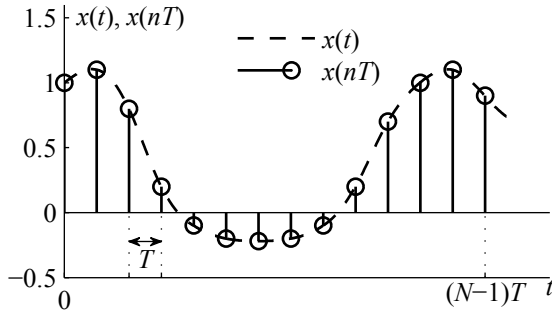
Niz je grafički predstavljen na slici 1.1(b). ¶

Često se diskretni signal $\{x[n]\}$ formira uniformnim odabiranjem analognog signala $x(t)$ sa periodom odabiranja od T sekundi. Niz $\{x[n]\}$ koji nastaje diskretizacijom po vremenu analognog signala $x(t)$ definiše se kao $x[n] = x(nT) = x(t)|_{t=nT}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Na slici 1.2 dat je primer niza nastalog uniformnim odabiranjem kontinualnog talasnog oblika.



Slika 1.1 Nizovi iz primera 1.1.

U praksi se odabiranje analognog signala najčešće odvija pomoću *analogno-digitalnog* (A/D) konvertora. Diskretni signal na izlazu A/D konvertora kvantovan je ne samo po vremenu, već i po amplitudi. Efekti kvantizacije amplitude biće razmatrani u četvrtoj glavi ove knjige.



Slika 1.2 Primer diskretnog signala nastalog uniformnim odabiranjem kontinualnog signala.

1.2.1 Računske operacije sa nizovima

U analizi diskretnih signala i sistema koriste se sledeće operacije sa nizovima: sabiranje i množenje nizova, množenje niza konstantom i pomeranje niza. *Sabiranje* ili *množenje* nizova $\{x[n]\}$ i $\{y[n]\}$ obavlja se tako što se sabiraju ili množe odgovarajući elementi, pri čemu dužine nizova $\{x[n]\}$ i $\{y[n]\}$ moraju biti jednake. Množenje niza $\{x[n]\}$ konstantom a znači da se svaki elemenat niza množi sa a . Za niz $\{y[n]\}$ kaže se da je *pomeran* u odnosu na $\{x[n]\}$ za n_0 odbiraka ako važi relacija

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (1.2)$$

gde je n_0 ceo broj. Pomeraj n_0 niza je najčešće pozitivan, pa se operacija pomeranja niza tada naziva *kašnjenje* niza.

1.2.2 Elementarni signali

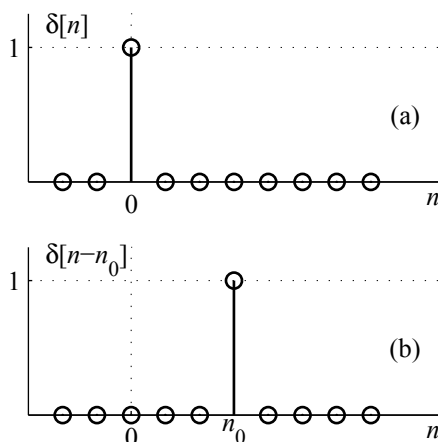
Postoji nekoliko karakterističnih elementarnih diskretnih signala koji se veoma često koriste, pa stoga zaslužuju da budu pojedinačno opisani.

Jedinični impuls. Najjednostavniji diskretni signal je jedinični impuls, slika 1.3(a). To je niz koji ima samo jedan nenulti elemenat, označava se sa $\{\delta[n]\}$ i definiše se sledećim izrazom,

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Slika 1.3(b) predstavlja signal $\{\delta[n-n_0]\}$ što označava jedinični impuls pomeren ili zakašnjen za n_0 odbiraka, koji se definiše kao

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases} \quad (1.4)$$



Slika 1.3 (a) Jedinični impuls $\delta[n]$; (b) pomereni jedinični impuls $\delta[n-n_0]$.

U analizi diskretnih signala i sistema jedinični impuls ima isti onaj značaj koji ima Dirakova delta funkcija u analizi kontinualnih signala i sistema. Zato se i ovaj signal još naziva i Dirakov (*Dirac*) ili delta impuls.

Najvažnija osobina jediničnog impulsa je *osobina selektivnosti*. Zahvaljujući ovoj osobini, bilo koji niz $\{x[n]\}$ može se prikazati preko jediničnog impulsa. Ako su date amplitude $x[0], x[1], x[2], \dots$, n -ti član niza $\{x[n]\}$ može se predstaviti formulom

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k], \quad (1.5)$$

što označava izdvajanje člana niza za koji je $n = k$.

Primer 1.2

Na slici 1.4 prikazan je niz $\{p[n]\}$. Ovaj niz se može prikazati kao zbir skaliranih i pomerenih jediničnih impulsa. Prema (1.5), n -ti član niza sa slike 1.4 može se izraziti preko zbira

$$p[n] = a_{-3} \delta[n+3] + a_2 \delta[n-2] + a_3 \delta[n-3] + a_7 \delta[n-7]. \quad \blacksquare$$