

## PREDGOVOR

Namera mi je bila da napišem drugo dopunjeno izdanje knjige *Statika linijskih nosača u ravni*, objavljene 2007. godine, dodavanjem dva nova poglavlja u kojima se razmatraju prostorni pravolinijski štap i krivolinijski štap kako u ravni tako i u prostoru. Prostorni tretman štapa i linijskih nosača u dodatim poglavljima uslovio je brisanje reči *u ravni* u naslovu pomenute knjige što je u tehničkom pogledu, zbog promene naslova, dovelo do stvaranja nove knjige. S toga sam ovu knjigu podelio u dva dela pri čemu njen prvi deo ima udžbenički karakter i sadrži knjigu *Statika linijskih nosača u ravni*, dok je u drugom delu koji je naslovljen kao *Odabrana poglavlja* priložen dodati rukopis. Greške koje sam uočio u knjizi *Statika linijskih nosača u ravni* ovom prilikom sam ispravio a neka mesta sam pokušao bolje da pojasnim.

Drugi deo je prevashodno namenjen onim čitaocima koji žele da prošire svoja znanja iz teorije štapa i linijskih nosača. Za praćenje ovog dela knjige zahteva se solidno poznavanje kinematike sistema materijalnih tačaka u prostoru i matematičkog aparata baziranog na tenzorskoj algebri i sistemima diferencijalnih jednačina.

Pri rešavanju diferencijalnih jednačina ravnoteže krivolinijskog štapa u ravni pomogao mi je prof. Milutin Obradović pa mu se zbog toga iskreno zahvaljujem.

Autor

# SADRŽAJ:

## PREDGOVOR

## I DEO – STATIKA LINIJSKIH NOSAČA U RAVNI

1. TEHNIČKA TEORIJA ŠTAPA	1
1.1 Pojam štapa	1
1.2 Bernouli Eulerov i Timošenkov gredni element	3
1.2.1 Komponentalne deformacije	3
1.2.2 Komponentalna pomeranja	5
1.2.3 Komponente napona i presečne sile	8
1.3 Uslovi ravnoteže diferencijalnog elementa štapa	14
1.4 Integralne jednačine štapa konačne dužine	17
1.4.1 Statičke jednačine, statičke nezavisne veličine štapa	18
1.4.2 Kinematičke jednačine, kinematičke nezavisne veličine štapa	24
1.4.3 Deformacijske nezavisne veličine štapa	27
1.5 „Deformacijski model“ teorije štapa	28
1.6 Mešoviti modeli teorije štapa	32
2. LINIJSKI SISTEMI U RAVNI	37
2.1 Elementi nosača	37
2.2 Statička analiza	39
2.2.1 Statičke nepoznate veličine linijskih nosača	39
2.2.2 Uslovi ravnoteže čvorova sistema	40
2.2.3 Statička klasifikacija linijskih nosača	43
2.3 Kinematička analiza	44
2.3.1 Uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova sistema	44
2.3.2 Kinematička klasifikacija nosača	48
2.3.3 Nepravilan raspored elemenata i kritična konfiguracija sistema	50
2.3.4 Unutrašnja kinematička stabilnost sistema, kinematički kruta ploča	52
2.3.5 Spoljašnja kinematička stabilnost sistema	54
2.4 Dejstvo temperaturnih uticaja na linijske sisteme	55
3. STATIČKI ODREĐENI SISTEMI	59
3.1 Strukturalna analiza statički određenih sistema	59
3.2 Metode rešavanja statički određenih sistema	67
3.2.1 Metoda čvorova	67
3.2.2 Metoda dekompozicije	67
3.2.3 Metoda zamene elemenata	68
3.2.4 Kinematička metoda	71

3.3 Sistemi sastavljeni od jedne kinematički krute ploče	73
3.3.1 Prosta greda	78
3.3.2 Konzola	86
3.4 Sistemi sastavljeni od dve kinematički krute ploče	88
3.4.1 Luk na tri zgloba	90
3.4.2 Luk na tri zgloba sa imaginarnim zglobom	95
3.4.3 Luk na tri zgloba sa zategom	98
3.5 Sistemi sastavljeni od lanca ploča	101
3.5.1 Formiranje lanca ploča	101
3.5.2 Određivanje reakcija spoljašnjih elemenata i sila veze	103
3.5.3 Gerberov nosač	105
3.6 Okvirni sistemi	107
3.7 Rešetkasti sistemi	108
3.7.1 Klasifikacija rešetki	109
3.7.2 Određivanje sila u štapovima rešetki metodom čvorova i metodom preseka	111
3.7.3 Analitički izrazi za sile u štapovima rešetke sa trougaonom ispunom	114
4. ENERGETSKI PRINCIPI I NJIHOVA PRIMENA NA LINIJSKE SISTEME	125
4.1 Energije deformabilnog sistema	125
4.1.1 Energija deformacije	126
4.1.2 Potencijalna energija	128
4.1.3 Ravanski linijski element	130
4.2 Princip o minimumu potencijalne energije	133
4.2.1 Primeri	134
4.2.2 Minimum komplementarne energije	137
4.3 Princip virtualnih sila	139
4.3.1 Moguće ravnotežno stanje sistema	139
4.3.2 Formulacija principa virtualnih sila	140
4.3.3 Određivanje generalisanih pomeranja statički određenih nosača	141
4.4 Princip virtualnih pomeranja	148
4.4.1 Moguće stanje deformacije	150
4.4.3 Kinematika krutih ploča u ravni	151
4.4.4 Kinematička metoda	157
4.5 Dijagrami pomeranja statički određenih grednih nosača	161
4.5.1 Kinematičko statička analogija štapa	162
4.5.2 Kinematičko statička analogija sistema	165
4.6 Dijagrami pomeranja čvorova rešetkastih nosača	172
4.6.1 Kinematičko statička analogija rešetkastih sistema	172
4.6.2 Williotov plan pomeranja	178
4.7 Teoreme o uzajamnosti	182

4.7.1	Betti'eva teorema o uzajamnosti radova	182
4.7.2	Teorema o uzajamnosti pomeranja	184
4.7.3	Teorema o uzajamnosti reakcija veza	186
4.7.4	Teorema o uzajamnosti reakcija veza i pomeranja	187
5.	STATIČKI NEODREĐENI SISTEMI	191
5.1	Opšta razmatranja	191
5.2	Metoda sila	194
5.2.1	Određivanje generalisanog pomeranja statički neodređenog nosača	195
5.2.2	Uslovne jednačine metode sila – Princip virtualnih sila	198
5.2.3	Uslovne jednačine metode sila – Minimum potencijalne energije	203
5.3	Ortogonalna ravnotežna stanja statički neodređenih nosača	205
5.3.1	Elastično težište	208
5.4	Primena kinematičke metode na statički neodređene nosače	213
6.	KINEMATIČKI NEODREĐENI SISTEMI-METODE DEFORMACIJE	219
6.1	Kinematička neodređenost sistema	220
6.2	Približna metoda deformacije	224
6.2.1	Veza između momenata na krajevima štapa i kinematički nepoznatih veličina sistema	224
6.2.2	Uslovne jednačine približne metode deformacije	232
6.2.3	Prizmatski štapovi	241
6.3	Tačna metoda deformacije	247
6.3.1	Bazna matrica krutosti	249
6.3.2	Generalisana pomeranja, generalisane sile, matrica krutosti i ekvivalentno opterećenje štapa	250
6.3.3	Membranska matrica krutosti	253
6.3.4	Matrica krutosti štapa tipa $k$	255
6.3.5	Štap tipa $g$	262
6.3.6	Neke napomene o matrici krutosti štapa	267
6.3.7	Transformacija veličina iz lokalnog koordinatnog sistema štapa na globalni koordinatni sistem	268
6.3.8	Obostrano zglavkasto vezani štap	272
6.3.9	Uslovne jednačine tačne metode deformacije	277
6.3.10	Veza između matrica sistema jednačina tačne i približne metode deformacije	282
7.	METOD KONAČNIH ELEMENATA	285
7.1	Interpolacione funkcije	285
7.2	Matrice transformacije deformacije	289
7.3.	Jednačina konačnog elementa štapa, matrica krutosti štapa i vektor ekvivalentnog opterećenja	290

7.4	Timošenkov gredni element	296
7.4.1	Hijerarhijske funkcije oblika, relativni parametri pomeranja	296
7.4.2	Matrica krutosti štapa sa linearnom promenom smičuće deformacije	299
7.4.3	Matrica krutosti štapa sa konstantnim smicanjem duž štapa	302
8.	SIMETRIČNI NOSAČI	309
8.1	Rastavljanje opterećenja	309
8.2	Granični uslovi po silama i pomeranjima u osi simetrije	310
8.3	Štap tip <i>s</i>	314
8.4	Štap u osi simetrije	320
9.	UTICAJ POKRETNOG OPTEREĆENJA	323
9.1	Određivanje ekstremnih vrednosti uticaja	326
9.2	Metode konstrukcija uticajnih linija za statičke veličine statički određenih grednih sistema	333
9.2.1	Statička metoda	333
9.2.2	Kinematička metoda	333
9.2.3	Metoda ravnotežnih koncentrisanih opterećenja	334
9.3	Rešetkasti nosači	345
9.4	Statički neodređeni nosači	347
9.5	Statički određeni sistemi	353
9.5.1	Prosta greda	353
9.5.2	Luk na tri zgloba	357
9.5.3	Gerberov sistem	364
9.5.4	Rešetkasti nosači	367
10.	PRIMER	385
10.1	Metoda sila	385
10.2	Približna metoda deformacije	390
10.3	Tačna metoda deformacije	397
10.4	Metoda sila	412
	LITERATURA	417

## II DEO – ODABRANA POGLAVLJA

11.	TEORIJA PROSTORNOG PRAVOLINIJSKOG ŠTAPA- PROSTORNI SISTEMI	419
11.1	Tehnička teorija savijanja prostornog štapa	419
11.2	Jednačine teorije štapa	421
11.3	Deformacioni model teorije prostornog pravolinijskog štapa	424
11.3.1	Štap tipa <i>g</i>	429
11.3.2	Konzolni štap	430
11.4	Statička klasifikacija prostornih linijskih sistema	432

11.5	Kinematička klasifikacija nosača .....	434
11.5.1	<i>Uslovi kompatibilnosti pomeranja i obrtanja čvorova</i> .....	434
11.5.2	<i>Relativni uslovi kompatibilnosti – pojam krutog tela u prostoru</i> ....	440
11.5.3	<i>Spoljašnja kinematička stabilnost</i> .....	442
11.6	Statički određeni prostorni sistemi.....	446
11.6.1	<i>Sistemi sastavljeni od jednog krutog tela</i> .....	446
11.6.2	<i>Sistemi sastavljeni od dva i više krutih tela</i> .....	451
12.	TEORIJA KRIVOLINIJSKOG ŠTAPA .....	455
12.1	Krivi štap u ravni.....	455
12.1.1	<i>Geometrija štapa</i> .....	455
12.1.2	<i>Statička analiza krivolinijskog štapa u ravni</i> .....	458
12.1.3	<i>Integracija diferencijalnih jednačina ravnoteže krivolinijskog štapa</i> .....	468
12.1.4	<i>Kružni štap</i> .....	472
12.1.5	<i>Deformacijske nezavisne veličine štapa</i> .....	473
12.1.6	<i>Matrica krutosti kružnog štapa</i> .....	476
12.1.7	<i>Proizvoljni krivolinijski štap u ravni</i> .....	486
12.1.8	<i>Parabolični štap</i> .....	495
12.1.9	<i>Pravolinijski štap</i> .....	497
12.1.10	<i>Brojni Primer</i> .....	498
12.1.11	<i>Deformacijska analiza krivog štapa u ravni</i> .....	505
12.1.12	<i>Naponsko deformacijske relacije</i> .....	515
12.1.13	<i>Timošenkova gredna teorija</i> .....	519
12.2	Prostorni krivolinijski štap .....	521
12.2.1	<i>Geometrija ose štapa</i> .....	521
12.2.2	<i>Uslovi ravnoteže</i> .....	524
12.2.3	<i>Integracija jednačina ravnoteže</i> .....	525
12.2.4	<i>Statičko geometrijska analogija prostornog krivolinijskog štapa</i> ..	528
12.2.5	<i>Statičko kinematička analogija prostornog krivolinijskog štapa</i> ....	532
12.2.6	<i>Deformacijska analiza</i> .....	534
12.2.7	<i>Formulacija matrice krutosti prostornog krivolinijskog štapa</i> .....	540
12.2.8	<i>Cilindrična zavojnica</i> .....	550
12.2.9	<i>Pravolinijski prostorni štap</i> .....	552