Branko D. Kovačević

Zoran Đ. Banjac

STOHASTIČKI SISTEMI

modelovanje i analiza, identifikacija i filtracija, uvod u stohastičko upravljanje

Akademska misao
Beograd 2020.

Branko D. Kovačević, Zoran Đ. Banjac

STOHASTIČKI SISTEMI
modelovanje i analiza, identifikacija i filtracija, uvod u stohastičko upravljanje

Recenzenti:
Dr Ljiljana Milić
Dr Ģeljko ņ urović

Izdaje i štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-830-6

Mesto i godina izdanja: Beograd, 2020.

Predgovor

Ova knjiga nastala je kao rezultat višedecenijske aktivnosti autora u obrazovanju inženjera elektrotehnike i računarstva, projektovanja tehničko-tehnoloških sistema i njihovoj primeni u rešavanju raznorodnih problema u industriji i privredi. Knjiga je deseta po redu u okviru udžbeničko-monografske edicije posvećene teoriji stohastičkih sistema sa primenama u statističkoj analizi podataka, obradi slučajnih signala i stohastičkom upravljanju. U okviru pomenutog serijala, do sada su odštampani sledeći naslovi:

1-3. B. Kovačević, Ž. Đurović, "Fundamentals of Stochastics Signals and Systems with Worked Examples", 1st edition, Academic Mind, Belgrade, 1999, 2nd and 3rd revised editions, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008 and 2011.

4-5. B. Kovačević, M. Milosavljević, M. Veinović, M. Marković, „Robusna digitalna obrada govornog signala", Akademska Misao, Beograd, 2000, 2nd revised edition, "Robust Digital Processing of Speech Signals", Springer International, Cham, Switzerland, 2018.

6-7. B. Kovačević, Z. Banjac, M. Milosavljević, „Adaptivni digitalni filtri", Akademska Misao, Beograd, 2005, 2nd revised edition "Adaptive Digital Filters", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

8. B. Kovačević, Z. Banjac, Ž. Đurović, „Filtriranje stohastičkih signala: optimalni, adaptivni i robusni estimatori parametara i stanja sistema", Akademska Misao, Beograd, 2017.

9. B. Kovačević, G. Kvaščev, „Identifikacija procesa", Akademska Misao, Beograd, 2018.

Građa za knjige u okviru edicije nastala je, sa jedne strane, na osnovu materijala koji je kroz više decenija pripremaju u cilju izvođenja nastave iz više predmeta na redovnim i poslediplomskim studijama pri Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Nastava iz nekih od ovih predmeta izvođena je na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, Elektrotehničkom fakultetu u Banja Luci, Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici, Vazduhoplovno-tehničkoj vojnoj akademiji u Žarkovu, Centru visokih vojnih škola u Beogradu, Univerzitetu države Floride (SAD), Univerzitetu Turku (Finska), Državnom Univerzitetu u Tripoliju (Libija), i Državnom Univerzitetu u Bagdadu (Irak). Sa druge strane, za formiranje kompletnog materijala za navedene knjige korišćeni su i rezultati naučno-istraživačkih projekata koji su realizovani kroz zajednički rad istraživačkih timova Elektrotehničkog fakulteta (ETF u Beogradu), Instituta Mihajlo Pupin (IMP - Beograd), Instituta za primenjenu matematiku i elektroniku (IPME - Beograd), Vazduhoplovno tehničkog vojnog instituta (VTVI – Žarkovo) i Vojno-tehničkog instituta kopnene vojske (VTI-KoV, Beograd). Rezultati pomenutih projekata korišćeni su za razvoj modernih sredstava vojne opreme i naoružanja, bezbednosnih sistema, kao i naprednih proizvodnih programa u industriji.

Autori izražavaju zahvalnost kolegama i višegodišnjim saradnicima iz pomenutih visokoškolskih i naučno-istraživačkih ustanova, koji su značajno doprineli da se knjige iz ove edicije dovedu do svoje završne forme. Autori posebnu zahvalnost duguju kolegama sa Katedre za signale i sisteme, pri Elektrotehničkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu na inspirativnim diskusijama tokom niza godina, a koje su poslužile kao osnova za uvođenje pomenutih predmeta u nastavne planove i programe, kao i izradu materijala za ediciju. Konačno, veliku zahvalnost autori duguju i recenzentima, čije su korisne sugestije doprinele poboljšanju kvaliteta knjiga.

Naučne discipline kao što su modelovanje, analiza, identifikacija, filtracija, simulacija i optimizacija imaju dominantnu ulogu u klasičnim inženjerskim strukama, kao što su elektrotehnika, računarstvo, mašinstvo, građevinarstvo, arhitektura, rudarstvo, tehnologija i metalurgija, poljoprivreda i šumarstvo, itd. Ove discipline imaju veliki značaj i za savremene multidisciplinarne oblasti u koje spadaju robotika i mehatronika, veštačka inteligencija i ekspertski sistemi, statističko prepoznavanje oblika, inteligentno upravljanje, inteligentni senzori i mreže, nauka o podacima, obrada signala, nauka o materijalima, itd. Sa druge strane, svaka tehnologija, računajući i savremene digitalne tehnologije, predstavlja vid inženjerstva, tako da inženjerska nauka i tehnologija zajedno čine alat za projektovanje fabrika budućnosti i uvođenje četvrte generacije (G4) industrije. Ovakva industrija predstavlja rešenje za enormno brzi rast savremene tehnologije, na koji sadašnja industrija i privreda nisu našle adekvatan odgovor, a što je rezultovalo u gubitak radnih mesta i pad ekonomskog rasta. Razvojem moderne industrije uspostaviće se ravnoteža između tehnologije, privrede i društva, što će dalje dovesti do otvaranja novih radnih mesta, poboljšanja privredne aktivnosti, povećanja ekonomskog rasta i porasta životnog standarda celokupnog stanovništva. Preduslov za uspešnu realizaciju ovakvog koncepta društva zasnovanog na ekonomiji znanja i modernim tehnologijama predstavlja efikasan i relevantan obrazovni sistem. Ova knjiga predstavlja mali korak u tom pravcu.

Knjiga je tako koncipirana da u prvom delu (poglavlja 2 do 9) objedinjuje materiju navedenu pod rednim brojevima od 6 do 9, tako da na unificirani način razmatra probleme modelovanja, analize, parametarske identifikacije, estimacije stanja stohastičkih signala i sistema, kao i filtriranje slučajnih signala. Posebno su razmatrani Bajesov pristup optimalnoj estimaciji, parametarska identifikacija sistema primenom koncepta greške predikcije i Gausovog metoda najmanjih kvadrata, neparametarska identifikacija sistema bazirana na Vinerovoj optimalnoj teoriji i estimacija stanja dinamičkih sistema na osnovu Kalmanove optimalne teorije. Naučni rezultati Gausa u XIX veku, Vinera u prvoj polovine XX veka i Kalmana u drugoj polovini XX veka omogućili su izgradnju efikasnih alata za povezivanje empirijskih podataka (merenja sa sistema) i njegove matematičke reprezentacije. Ovim naučnim dostignućima je po prvi put u istoriji nauke i tehnike uspostavljena veze između inženjerske prakse i matematičke teorije, što je dovelo do daljeg razvoja tehničkih nauka i same tehnologije. To je dalje prouzrokovalo ubrzanje industrijske revolucije, koja traje više od jednog veka i danas se nalazi u četvrtoj fazi. U knjizi su dati mnogobrojni eksperimentalni rezultati, kao i aspekti praktične primene modelovanja, analize, identifikacije i filtracije u realnim uslovima. U drugom delu knjige (poglavlja 10 do 13) razmatrani su problemi upravljanja sistemima koji rade u stohastičkom okruženju. Posebna pažnja posvećena je konceptu optimalnog stohastičkog upravljanja, zasnovanog na minimizaciji tehno-ekonomskog indeksa performanse, koji pored disipacije energije u sistemu upravljanja, kao tehničke mere tačnosti realizacije zadate upravljačke akcije, uključuje i potrebnu energiju optimalnog upravljačkog signala, kao ekonomski kriterijum. Posebno su razmatrani diskretni i kontinualni linearni stohastički sistemi, koji su modelovani u prostoru stanja. Kao mogući alati za minimizaciju kriterijuma optimalnosti razmatrane su tri optimizacione tehnike: klasičan varijacioni račun sa Lagranžovim multiplikatorima, Pontrjaginov metod minimuma ili maksimuma i Belmanov metod dinamičkog programiranja. Pokazuje se da je, u slučaju linearnih stohastičkih sistema, optimalni zakonu upravljanja identičan kao kod determinističkog linearnog sistema, pri čemu se nemerljivi slučajni vektor stanja zamenjuje njegovom optimalnom srednje-kvadratnom procenom na bazi Kalmanovog estimatora. U slučaju diskretnih linearnih stohastičkih sistema dodatno je razmatrana i ulazno-izlazna reprezentacija sistema, kao i slučaj kada parametri ove reprezentacije nisu egzaktno poznati, što rezultuje u koncept adaptivno-prediktivnog upravljanja. U celokupnom materijalu korišćene su simulacije, kao važno numeričko sredstvo za sagledavanje praktičnih dometa izloženih teorijskih rezultata.

Knjiga je prevashodno namenjena studentima redovnih i poslediplomskih studija Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, a pre svega studentima odseka za Signale i sisteme, ali može korisno poslužiti i studentima matematičkih i tehničkih fakulteta, koji se tokom svog školovanja susreću sa zadacima modelovanja i analize, identifikacije i filtriranja, kao i sa tehnikama optimizacije i automatskim upravljanjem. Algoritmi i rešenja razmatrani u ovoj knjizi mogu naći svoju primenu u širokom području stohastičke analize podataka, modelovanja i identifikacije procesa, obrade realnih signala različite fizičke prirode (govor, slika, seizmički signali, radari, sonari, sateliti, bio-medicinski signali, itd.), kao i u upravljanju procesima, tako da knjiga može poslužiti i inženjerima različitih usmerenja.

Efikasno praćenje izložene metodologije podrazumeva da čitalac poseduje osnovna znanja iz inženjerske matematike, koja se stiču na prve dve godine studija tehnike, a obuhvataju oblasti linearne algebre, matematičke analize, kompleksne analize, numeričke analize i verovatnoće sa statistikom.

Beograd, februar 2020. godine

Autori

Sadržaj

Spisak slika

Spisak tabela

Uvod

U opštem slučaju pojam „filter“ podrazumeva fizički uređaj čiji je zadatak da ukloni neželjene sastojke iz odgovarajuće mešavine. U originalnoj definiciji filter je fizički sklop koji rešava problem izdvajanja neželjenih komponenti iz mešavine koja se sastoji od gasa, tečnosti i čvrste faze. Kasnije, u eri elektronskih cevi i analogne elektronike, ovaj termin je označavao analogno kolo koje filtrira elektronske signale. Ovakvi signali predstavljali su mešavine komponenti (harmonika) na različitim frekvencijama, te je ovaj fizički (elektronski) sklop potiskivao neželjene frekvencije. Ovaj koncept je proširen krajem prve polovine 20. veka na izdvajanje korisnog signala iz zašumljene sredine, pri čemu su i signal i šum opisani stohastički preko odgovarajućih spektralnih gustina snage i njima pridruženih kovarijacionih funkcija. Međutim, pre početka uvodnog izlaganja razmotrimo ukratko osnovne momente u razvoju teorije estimacije. S obzirom da je teorija estimacije našla široku primenu ne samo u oblasti obrade stohastičkih signala već i u upravljanju sistemima, u nastavku će biti razmatrani osnovni principi i zadaci automatskog upravljanja, kao i kratak pregled istorije automatike.

Kratak prikaz istorije estimacije

Neizbežnost postojanja grešaka prilikom merenja fizičkih veličina uočeno je još u doba Galilea Galileja (*Galileo Galilei,* 1564-1642). Međutim, prvi formalni matematički metod za tretiranje ovakvih grešaka predložio je tek 1795. godine Karl Fridrih Gaus (*Carl Friedrich Gauss,* 1777-1855). Iako se ovaj metod, koji je nazvan metod najmanjih kvadrata (u engleskoj literaturi *Method of Least Squares*) pretežno koristi za optimalno rešavanje problema linearne estimacije, Gaus je primenio ovaj metod za rešavanje, sa matematičkog stanovišta, specifičnog nelinearnog problema estimacije u okviru astronomije. Ovaj događaj je obrađen na više mesta u literaturi i ukratko se može prikazati na sledeći način, [24]. Prvog dana 19. veka, 01. Januara 1801. godine, italijanski astronom Đuzepe Pjaci (*Giuseppe Piazzi,* 1746-1826) proučavao je astronomski katalog zvezda, neznavši da je katalog odštampan sa greškom. Pokušavajući da pronađe nedostajuću zvezdu u katalogu, otkrio je novu planetu, koju je kasnije nazvao Ceres, a da nije bio ni svestan svog otkrića. Narednu 41 noć pratio je kretanje planete iz observatorije u Palermu, nakon čega je prekinuo eksperiment. Međutim, kada je nakon izvesnog vremena nastavio eksperiment, više nije mogao da pronađe nebesko telo. O svom otkriću je 24. Januara 1801. godine pismenim putem obavestio Johana Boda (*Johan Bode, 1747-1826*), koji je bio poznat po Bodeovom zakonu, na osnovu koga se moglo proračunati, u astronomskim jedinicama, rastojanje planete od Sunca, na osnovu formule

$$d_n = \frac{1}{10}\left(4 + 3 \times 2^n\right),\ n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Iako je pripisana Bodeu, ovu formulu je prvi predložio nemački astrolog *Johan Tietz* 1772. godine. U to doba je bilo poznato samo 6 planeta, a 1781. godine *Friedrich Herschel* je otkrio Uran, koji odgovara formuli za $n = 6$. Pri tome, nije otkrivena ni jedna planeta koja odgovara broju $n = 3$, a udruženje astronoma Evrope, čiji Piazzi nije bio član, tragalo je više od 30 godina za nedostajućom planetom. Zbog sporosti pošte, pismo je stiglo do Bodea tek 20.3.1801. godine. Bode je posumnjao da Pjacijevo otkriće predstavlja rešenje za nedostajuću planetu, ali na osnovu do tada poznatih metoda nisu mogli da se odrede parametri njene orbite. Posmatrani problem se svodio na rešavanje nelinearnih jednačina, za koje je sam Isak Njutn (eng. *Isac Newton* 1642-1727) tvrdio da predstavljaju jedan od najtežih matematičkih problema u astronomiji, koji je do tada bio nerešiv, tako da je planeta Ceres ponovo ostala izgubljena u svemiru. Pjaci je svoje otkriće objavio tek na jesen 1801. godine. Njegovo tvrđenje o mogućem postojanju 8. planete bilo je suprotstavljeno zvaničnom stavu intelektualne elite tog doba, pre svega filozofa kojima je, između ostalih, pripadao i Georg Hegel, a koji su tvrdili da postoji filozofski dokaz za samo 7 planeta u sistemu, te da astronomi gube vreme pokušavajući da otkriju osmu planetu. Rasprava je zainteresovala genijalnog matematičara iz *Göttingen*-a Karla Gausa (*Carl Friedrich Gauss,* 1777-1875), starog 24 godine, koji se pored čistog matematičkog rada bavio i oblastima primenjene fizike, tako da je prethodno već proučavao i problem određivanja orbite planeta, ali je vremenom počeo da gubi interesovanje za ovo istraživanje. Videvši polemiku o novoj planeti, Gaus se vratio istraživanju kretanja planeta i u decembru 1801. godine dao je procenu (estimaciju) orbite planete Ceres. Rezultat je poslao Pjaci, koji je na osnovu njega poslednjeg dana 1801. godine ponovo otkrio izgubljenu planetu. Gaus je ovaj rezultat objavio tek 1809. godine, kada je opisao metod najmanjih kvadrata (eng. *Least Squares* ili skraćeno *LS*), iako je sam metod otkrio još 1795. godine, u svojoj osamnaestoj godini. Nakon otkrića planeta Ceres je prestala da bude od interesa za naučnu i akademsku javnost, ali je metod najmanjih kvadrata ostao predmet interesovanja naučnika, istraživača, inženjera i tehnologa kroz vekove, sve do današnjeg vremena. Ovaj metod je imao presudan uticaj na razvoj nauke i tehnike, s obzirom da je predstavljao prvi optimalni metod estimacije, koji je omogućio vezu između eksperimentalnih i teorijskih rezultata. On je povezao eksperimentalne i teorijske nauke i dao praktično rešenje za estimaciju nepoznatih parametara u teorijskim matematičkim modelima, na osnovu korišćenja eksperimentalnih podataka. Sam Gaus je ostao zapamćen kao kralj kraljice nauke – matematike, a njegova naučna delatnost se može razvrstati po datumima na sledeći način: 1800-1820, astronomija; 1820-1830, geodezija; 1840, matematika i fizika, a posebno elektromagnetizam, Zemljin magnetizam i teorija privlačnosti prema Njutnovom zakonu; 1841-1845, fotografija i geometrija povezane sa funkcijama kompleksne promenljive; uz navedeno bavio se i praktičnim pitanjima fizike, a pronašao je magnetometar i električni telegraf (1833. godine).

Prvu formalnu teoriju optimalne estimacije za sisteme koji uključuju i slučajne procese su dali Andrej Nikolajević Kolmogorov (*Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, 1903-1987) i Norbert Viner (*Norbert Wiener*, 1894-1964). Ruski naučnik Kolmogorov je oko 1925. godine, radeći u okviru tima čiji je član bio i Aleksandar Jakovljevič Hinčin (*H. Ya. Khinchin, 1894-1957*), redefinisao osnove teorije verovatnoće u teoriju mera, što je rezultovalo u pogodan matematički aparat za dalji razvoj teorije verovatnoće i slučajnih procesa. Zajedno sa Norbertom Vinerom smatra se osnivačem teorije predikcije (ekstrapolacije), interpolacije i filtracije slučajnih Markovskih procesa (u engleskoj terminologiji *Theory of prediction smoothing and filtering*) kao i generalne teorije ergodičnih slučajnih procesa. S druge strane, N. Viner je bio čudo od deteta početkom dvadesetog veka. Formalno nije išao u osnovnu školu, već ga je do devete godine podučavao otac, nakon čega je upisao srednju školu, koju je završio sa jedanaest godina. Na Univerzitetu *Tufts* upisao je studije matematike, koje je završio sa 14 godina, a doktorske studije na Univerzitetu Harvard završio je u svojoj osamnaestoj godini. Po doktoriranju, narednih 6 godina, radio je van akademske zajednice, a 1919. godine je dobio mesto predavača na čuvenoj visokoškolskoj naučnoj ustanovi *Massachusetts Institute of Technology* (skraćeno MIT), na kojoj je proveo ostatak radnog veka. Jedno od njegovih najznačajnijih otkrića u oblasti matematike predstavlja generalizovana harmonijska analiza, kojom je proširio Furijeovu transformaciju i na funkcije (signale) konačne snage, za razliku od originalnog rezultata koji se odnosio samo na funkcije (signale) konačne energije. Značajan rezultat je i matematički dokaz da se transformacijom belog šuma dobija, takođe, beli šum, kao i otkriće da autokovarijaciona funkcija široko stacionarnog slučajnog procesa i spektralna gustina snage predstavljaju Furijeov transformacioni par. Poslednji rezultat poznat je u literaturi kao Viner-Hinčinova (*Wiener-Khinchin*) teorema, ali je kasnije ustanovljeno da je Ajnštajn (*Albert Einstein,* 1879-1955) još pre toga otkrića poznavao ovaj rezultat. Početkom II svetskog rata, Viner je bio angažovana na vojnom zadatku, čiji je cilj bio projektovanje sistema automatskog upravljanja koji će na osnovu merenja sa osmatračkog radara da usmerava protiv-vazdušnu odbranu na neprijateljske letelice. Uvažavajući različite brzine aviona i topovskih zrna, zadatak upravljanja se svodio na predviđanje budućeg položaja cilja na osnovu analize zašumljenih signala, koje je generisao radar. Viner je predložio rešenje u formi minimalne srednje-kvadratne greške predikcije (eng. *Least Mean-Square prediction error,* skraćeno LMS) koristeći autokovarijacione funkcije signala i šuma. Predloženo rešenje se svodi na integralni operator, odnosno na integralnu jednačinu, koja je u literaturi poznata kao Viner-Hopfova jednačina, a tadašnja analogna tehnologija omogućila je da se predloženo rešenje realizuje koristeći analogna elektronska kola, uz odgovarajuća ograničenja na relevantne autokovarijacione funkcije, odnosno njima pridružene transformacione parove u frekvencijskom domenu, u obliku spektralnih gustina snaga. Ovim se probabilistička priroda slučajnih fenomena izražava preko spektralne gustine snage u frekvencijskom domenu. U trenutku kada je Viner kompletirao svoj rad na sintezi vremensko-kontinualnog prediktora, Kolmogorov je predložio rešenje za optimalni linearni prediktor za vremenski-diskretne sisteme. Viner je svoj rezultat objavio krajem 1940. godine u izveštaju pod naslovom „*Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*“, [139]. Izveštaj je sadržao matematičke detalje koji su prevazilazili programe matematike na redovnim studijama elektrotehnike, tako da je ovaj materijal kasnije korišćen na poslediplomskim studijama elektrotehnike na vodećim univerzitetima u svetu. Međutim, u naučno-popularnoj literaturi, Viner je poznatiji kao promoter kibernetike (eng. *cybernetic*), nego po Vinerovom estimatoru.

Sredinom dvadesetog veka, Rudolf Emil Kalman (1930-2016) uveo je koncept varijable stanja i redefinisao Vinerov problem optimalne filtracije preko konačno-dimenzionog modela signala u prostoru stanja, čime je znatno pojednostavio matematičko izvođenje, a dobijeno rešenje nazvano je Kalmanov filter, [161, 162]. Rudolf Kalman je rođen u Budimpešti, ali je njegova porodica tokom Drugog svetskog rata emigrirala u SAD i nastanila se u gradu *Youngstown*, država Ohajo, 1944. godine, gde je Rudolf završio *Youngstown College*. Nakon toga, upisao je studije elektrotehnike na prestižnom univerzitetu MIT, gde je diplomirao 1953. godine i magistrirao 1954. godine. Mentor njegovog magistarskog rada je bio *Ernst Adolph Guillemin*, a tema rada je bila analiza ponašanja rešenja diferencnih jednačina drugog reda. U svom radu, R. Kalman je otkrio da se ova rešenja znatno razlikuju od rešenja diferencijalnih jednačina drugog reda, te da pokazuju haotično ponašanje. Po diplomiranju, godinu dana je radio kao razvojni inženjer na projektovanju velikog analognog sistema upravljanja za kompaniju *E. J. DuPont*, nakon čega je 1955. godine dobio poziciju predavača i studente doktorskih studija iz oblasti elektrotehnike na Univerzitetu Kolumbija (*Columbia State University, New York*). U to doba, Kolumbija je bila vodeći univerzitet u oblasti teorije sistema automatskog upravljanja (eng. *control theory*) a najeminentniji naučnici i profesori na Univerzitetu su bili Džon Ragacini (*John R. Ragazzini*) i *Lotfi A. Zadeh* (*L. A. Zadeh* je poznat kao osnivač teorije rasplinutih (*fuzzy*) skupova i sistema). Kalman je doktorirao 1957. godine, nakon čega je godinu dana radio kao istraživač u razvojno-istraživačkoj laboratoriji kompanije *International Business Machines Corporation* u gradu *Poughkeepsie*, a narednih šest godina u istraživačkom centru *Research Institute for Advanced Studies* (*RIAS*) kompanije *Glenn I. Martin* u Baltimoru.

Još tokom studija na Univerzitetu MIT, 1953. godine, Kalman se zainteresovao za algebarsku prirodu matematičke teorije sistema i moguću vezu između ove dve discipline. Ideju je dobio dok je čitao rad o vremenski-diskretnim sistemima (*Sampled-data systems*), koji je godinu dana ranije objavio Ragacini. Kalman je uočio da postoji formalna analogija između vremenski-kontinualnih i vremenski-diskretnih sistema, iako rešenje linearnih diferencijalnih jednačina, kojima su reprezentovani kontinualni sistemi, ne može da konvergira ka nultom ravnotežnom stanju za konačno vreme, što nije slučaj sa linearnim diferencnim jednačinama koje opisuju diskretne sisteme. Takođe je uočio da se linearni diskretni sistemi, kao analogija sa linearnim kontinualnim sistemima, mogu rešavati transformacionim metodama. Naredne, 1954. godine, započeo je istraživanja koja su se odnosila na kontrolabilnost (*controllability*), što se u osnovi svodi na odgovor na pitanje „Da li postoji ulazna upravljačka funkcija koja će stanja sistema dovesti na nultu vrednost?“. Posebno je istraživao da li postoji algebarski uslov kontrolabilnosti, a rešenje je našao u formulaciji matrice kontrolabilnosti i određivanju njenog ranga. Dobijeni rezultat je predstavljao vezu između algebre i teorije sistema. Nešto kasnije, 1958. godine, Kalman je uveo koncept stanja i model linearnog vremenski-diskretnog sistema u formulacju Vinerovog problema optimalne filtracije, čime je dobio znatno jednostavnije matematičko rešenje problema, poznato u literaturi kao Kalmanov filter. Pre nego što je objavio ovaj rezultat u naučnom časopisu, Kalman ga je prikazao kroz niz predavanja na univerzitetima i istraživačkim centrima. Inače, rad je objavio u časopisu namenjenom inženjerima mehanike i mašinstva, a ne elektrotehnike, smatrajući da nove ideje izazivaju podozrenje i sumnje, tako da njihovo plasiranje zahteva osmišljen pristup, korak po korak. Sledeći rad posvećen kontinualnoj verziji svog filtra poslao je u elektrotehnički časopis, ali je prvi put rad bio odbijen, pošto je jedan od recenzenata ukazao da je matematičko izvođenje možda pogrešno, što se pokazalo tačnim. Nakon publikovanja rada, Kalmanov filter je prihvaćen kao nastavni materijal na redovnim studijama elektrotehnike mnogih univerziteta u svetu, s obzirom da je nivo potrebnog matematičkog predznanja odgovarao kursevima matematike na studijama elektrotehnike. Takođe, Kalmanov rad je inspirisao mnoge doktorske disertacije narednih decenija i još uvek izaziva veliko interesovanje naučnika i istraživača.

Kalmanov filter je prvi put implementiran 1960. godine u okviru programa *Apollo,* koji je imao za cilj slanje letelice, sa posadom, na Mesec i njen povratak na Zemlju. Iako je Kalmanov filter primarno projektovan za rešavanje problema optimalne linearne estimacije, *Stanley F. Schmidt* je primenio Kalmanov filter za estimaciju trajektorije i upravljanje letelicom u realnom vremenu, koristeći nelinearni model u prostoru stanja. Ovo rešenje je kasnije u literaturi nazvano „Prošireni Kalmanov filter" (eng *Extended Kalman filter- EKF*). Naredne, 1961. godine, po preporuci Šmita, *Richard H. Battin* iz istraživačkog centra MIT *Instrumentation Laboratory,* nazvanog kasnije *Charles Stark Draper Laboratory,* iskoristio je model u prostoru stanja da projektuje i implementira astronautički sistem vođenja (*Astronautic Guidance System*), tako da je Kalmanov filter postao deo računarskog sistema za vođenje rakete *Apollo* (*Apollo On-board Guidance*). Konačno, sredinom šezdesetih godina prošlog veka, opet pod uticajem Šmita, Kalmanov filter je postao deo navigacionog sistema transportnog aviona (*Northrup – built navigation system for the C5A air transport*), koji je realizovan u kompaniji *Lockheed Aircraft*. Kalmanovim filtrom je rešen problem fuzije podataka sa različitih senzora, kao što su kombinovani podaci sa radarskih i inercijalnih senzora, u cilju estimacije trajektorije letelice, kao i problem odbacivanja merenja koja sadrže velike greške (anomalna merenja). Problem odbacivanja merenja nekonzistentnih sa većinom ostalih podataka rezultovao je kasnije u razvoj statističke teorije robusne estimacije. Danas je Kalmanov filter neizbežan deo bilo kog sistema za praćenje, vođenje i upravljanje pokretnim objektima.

Pored problema kontrolabilnosti, Kalman se šezdesetih godina prošlog veka bavio i dualnim (simetričnim) problemom opservabilnosti dinamičkih sistema, u smislu rekonstrukcije nemerljivih stanja na osnovu raspoloživih merenja. Pokazao je da postoje algebarska dualna (simetrična) rešenja sa kontrolabilnošću, u formi matrice opservabilnosti, koja se može dobiti iz matrice kontrolabilnosti zamenom odgovarajućih parametara u modelu stanja. Na taj način se jedan problem može transformisati u drugi i obrnuto. Konačno, radeći u RIAS-u, Kalman je sreo *Richard S. Bucy*-a, koji je ukazao da Viner-Hopfova jednačina i Vinerov filter predstavljaju ekvivalent Rikatijeve (*Jacopo Riccati*) jednačine u Kalmanovom filtru, pod uslovom da se pretpostavi konačno dimenzioni model u prostoru stanja. Time je ukazao na generalnu prirodu veze između integralnih i diferencijalnih jednačina, što do tada nije uočeno. Pored toga, njih dvojica su dokazali da jednačina Rikatija može da ima stabilno ravnotežno stanje čak i u slučaju da je sam dinamički sistem nestabilan, ali pod uslovom da je sistem kontrolabilan i opservabilan. Ovaj rezultat je vrlo značajan sa stanovišta proučavanja praćenja pokretnih objekata. Konačno, oko 1962. godine, Kalman je počeo da radi na teoriji realizacije (*realization theory*), u cilju određivanja modela sistema kojim se može objasniti njegovo ponašanje sa stanovišta ulazno-izlaznih karakteristika. Istraživanje je rezultovalo u princip jedinstvenosti (*uniqueness principle*), u smislu postojanja jedinstvenog preslikavanja egzaktnih ulazno-izlaznih podatka, bez prisustva šuma, u adekvatan linearni model sistema.

Široka prihvaćenost Kalmanovog filtra u obrazovnim, naučnim i tehničko-tehnološkim krugovima nije prošla bez dodatnih problema prilikom implementacije filtra. Jedan od osnovnih uslova za uspešnu implementaciju Kalmanovog filtra predstavlja adekvatan model u prostoru