Prof. dr Milorad Stevanović
Prof. dr Predrag Petrović

Riemann-ova zeta-funkcija i njena primena na izračunavanje nekih suma i integrala

Akademska misao, Beograd
Fakultet tehničkih nauka, Čačak
Beograd, 2020. godine

Naziv: **Riemann-ova zeta-funkcija i njena primena na izračunavanje nekih suma i integrala**

Karakter dela: Monografija

Autori: Prof. dr Milorad Stevanović,
Fakultet tehničkih nauka u Čačku
Prof. dr Predrag Petrović,
Fakultet tehničkih nauka u Čačku

Recenzenti: Prof. dr Dragomir Simeunović,
Rudarsko-geološki fakultet u Beogradu
Prof. dr Milan Tasković,
Matematički fakultet u Beogradu

Izdavači: Akademska Misao, Beograd
Fakultet tehničkih nauka, Čačak

Štampa: Akademska misao, Beograd

Tiraž: **100 primeraka**

Štampanje ovog teksta kao monografske publikacije odobreno je na osnovu člana 79. Statuta Fakulteta tehničkih nauka u Čačku, br. 3072 od 27.12.2019. godine, člana 9. i člana 13. Pravilnika o udžbenicima br. 389/10 od 06.03.2013. godine, i na predlog Komisije za izdavačku delatnost, odlukom Nastavno-naučnog veća Fakulteta tehničkih nauka u Čačku br. 19-71/9 od 22.01.2020. godine.

Predgovor

Veoma složene matematičke ideje često potiču iz istraživanja i traženja odgovara na pitanja koja su jednostavna za razumevanje. Upravo je *Riemann*-ova zeta funkcija jedan takav složeni matematički objekat. Proučavanje teorije ove funkcije proizašlo je iz ispitivanja vezanog za raspodelu prostih brojeva [224]. Oni sami za sebe predstavljaju nešto jednostavno i skoro svakome razumljivo, ali šta je sa njihovom distribucijom? Pronalaženje sledećeg poznatog prostog broja može izgledati jednostavno na prvi pogled, ali to u praksi nije slučaj. Matematičari traže opšte pravilo koje će diktirati distribuciju prostih brojeva bilo koje veličine. Ova potraga je postepeno navela matematičare kao što je *Bernhard Riemann* da koriste teoriju kompleksnih funkcija kako bi opisali distribuciju prostih brojeva.

Riemann-ove zeta funkcija igra centralnu ulogu u mnogim oblastima u kojima se primenjuje kompleksna analiza, kao što je npr. teorija brojeva (npr. generisanje iracionalnih i prostih brojeva) [220, 223, 224], a takođe i kao važan alat u analizi signala u mnogim poljima savremene prakse i tehnike, kriptografiji. Istorijski gledano [218, 231], tokom vremena više pažnje je posvećeno proučavanju zatvorenog oblika *Riemann*-ove zeta funkcije sa pozitivnim celobrojnim argumentima, iz razloga što takve specijalne vrednosti diktiraju svojstva objekata sa kojima su povezani. U fizici kondenzovane materije, na primer, poznata *Sommerfeld*-ova ekspanzija,koja se koristi za izračunavanje broja čestica i unutrašnje energije elektrona, uključuje *Riemann*-ovu zeta funkciju sa parnim celobrojnim vrednostima argumenata [129]. Sa druge strane, spin-spin korelaciona funkcija izotropnog spina-$1/2$ u *Heisenberg*-ovom modelu [221], izražena je preko $\ln 2$ i *Riemann*-ove zeta funkcije sa neparnim celobrojnim argumentima [202, 205].

Izračunavanje *Riemann*-ove zeta funkcije i srodnih serija je takođe vrlo aktuelna tema u računarskoj matematici [214, 222, 226, 230], uz uoptrebu najnaprednijih softverskih alata kakav nudi npr. programski paket Mathematica. Tradicionalne metode bazirane su na *Euler-Maclaurin*-ovoj i *Riemann-Siegel*-ovoj formuli, međutim stalno se razvijaju nove tehnike i algoritmi [211, 225, 227, 229]. Tipično je da u praksi određeni numerički metod bude ograničen na poseban domen. Stoga, kada se koncentrišemo na *Riemann*-ovu zeta funkciju sa neparnim celobrojnim argumentima, treba konstruisati poseban metod kako bi se uspostavila veza između vrednosti *Riemann*-ove zeta funkcije sa neparnim i parnim celobrojnim argumentima. Upravo metode i tehnike koje su opisane i razvijene u monografiji nude takav pristup i daju, nadamo se, jasnu smernicu na putu ka novim rezultatima na ovom polju.

Monografija je nastala kao rezultat višedecenijskog rada profesora Milorada Stevanovića na izučavanju *Riemann*-ove ζ-funkcije i njene primene na izračunavanja različitih suma i integrala, koji nalaze primenu u različitim oblastima nauke i tehnike [198, 202]. Ova više nego zahteva oblast kompleksne analize pred autore je postavila potrebu definisanja i dokaza više osobina ove funkcije, što je podržano kroz mnoštvo radova različitih autora u periodu dužem od 200 godina, tako da je praktično prvih 12 poglavlja posvećeno ovoj tematici. Autori su sa svoje strane učinili ogroman napor kako bi se na nov, jasan i inovativan način čitaocu pružila mogućnost da sagleda sve najznačajnije osobine *Riemann*-ove ζ-funkcije. Dokazi iznetih stavova su kao takvi potpuno originalni. Time je ustanovljena i dobra teorijska osnova da bi se u narednim poglavljima centar istraživanja usmerio na problem izračunavanja višestrukih suma. U prvih devet poglavlja monografije dat je pregled najnovijih rezultata o funkciji $\zeta(s)$, a u naredna tri se nalaze originalni doprinosi autora, vezani za određivanje vrednosti integrala i suma u kojima se pojavljueje *Riemann*-ova funkcija.

Prvi problem koji je detaljno obrađen je problem izračunavanja koeficijenata oblika $F_{(p,q)}(-1)$, $G_{(p,q)}(1)$, $G_{(p,q)}(-1)$, $H_{(p,q)}(-1)$. Značaj razmatranog problema, koji potiče od *Euler* i *Goldbach*, je u tome što se on odnosi na koeficijente koji su vrednosti osnovnih višestrukih suma reda 2, u tačkama -1, 1. Neke od višestrukih suma reda 2, posmatrane su u tački $z = i$. Korišćene su metode razlaganja izraza na parcijalne razlomke, na stepene redove, uz sumiranje po specijalno određenim potskupovima indeksa m, n, da bi se dobile odgovarajuće funkcionalne jednačine, u oblasti $|z| \leqslant 1$ i specijalno na skupu $|z| = 1$. Takav pritup je potpuno jedinstven, kao i tehnike koje su korišćene kako bi se došlo do traženih rezultata, i kao takvi mogu se smatrati potpuno originalnim. Funkcije $F_{(p,q)}(x)$, $G_{(p,q)}(x)$, $H_{(p,q)}(x)$ za $|x| \leqslant 1$ su izvedene kako bi se ustanovile razne funkcionalne relacije izmeđun njih i specijalno takve relacije za $x = -1$, 1. Iz postupka koji je sproveden može se zaključiti da su rezultati do kojih se došlo u okviru monografije, dobijeni nezavisno od rezultata datih u knjizi *Nielsen*-a, i da su opštiji u odnosu na njih. Osim toga, navedeni su i neki specijalni slučajevi gore navedenih koeficijenata, koji u toj formi do sada nisu postojali u stručnoj matematičkoj literaturi.

U samoj monografiji, za gore pomenute koeficijente, rešen je slučaj kada je $p+q$ neparan broj (Poglavlje 13). Takođe su navedeni i neki specijalni slučajevi gore navedenih koeficijenata, kada je $p + q$ paran broj. Pored toga, određene su i relacije inverzne jedna drugoj u kombinatornom smislu. Izračunate su vrednosti koeficijenta $\omega_j(p, q)$ i to svih 16, pri čemu njih 10 u slučaju kada je $p + q = 2k + 1$ i 6 za $p + q = 2k$. Na kraju pomenutog poglavlja, navedene su formule za:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

za $r = 1$ i za $r = 2k$. Pored ostalog definisana je i vrednost sume oblika:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

čime je izvršeno uopštenje jedne od *Hardy*-evih formula iz 20-tih godina XX veka. Rad na ovim sumama doveo je i do novih interesantnih kombinatornih formula. Ono što ostaje kao otvoreni problem, nakon dobijenih rezultata, su komplementarni slučajevi rešenim.

U poglavlju 14 vršeno je integraljenje funkcije $f(z) = \frac{\log^2(1-z)}{z}$ po odgovarajućoj konturi, da bi se dobile određene generatorne relacije za višestruko sumiranje. Te generatorne relacije su veoma pogodne za uzastopno diferenciranje i integraljenje. Dobijene su sumacione formule u kojima se pojavljuju $\zeta(3)$ i *G-Catalan*-ova konstanta, a na osnovu određene vrednosti za $G_{(2k,1)}(-1)$ (u Poglavlju 13) dobijena je relacija za:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{m^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

a odatle i formulu za $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Dokazano je da se uz primenu čisto kombinatornih razmatranja može izvršiti svođenje trostrukih suma na dvostruke. Neke od formula su samo navedene bez dokaza, svesni mogućnosti i nekih drugih poopštenja. U ovom poglavlju je korišćen metod konturne integracije, kombinovan sa metodom primene raznih kombinatornih relacija. Od osnovnih trostrukih suma oblika:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda m+\mu n+\nu p}}{mnp(m+n+p)}, \qquad \lambda,\mu,\nu\in\{0,1\}$$

dobijene su formule za sve četire moguće sume (moguće vrednosti parametara λ,μ,ν). Ove sume su u direktnoj vezi sa integralima:

$$\int\limits_0^1 \frac{\log^3(1-x)}{x}\,\mathfrak{d}\,x, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\log^3(1+x)}{x}\,\mathfrak{d}\,x$$

tako da se njihove vrednosti mogu odrediti na osnovu već izvedenih formula u Poglavlju 13. Dobijene su i formule za sve sume oblika:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu^p}{p}, \qquad \lambda,u,\nu\in\{-1,1\}$$

U postupku izračunavanja tih suma korišćene su razne kombinatorne sume i rezultati iz Poglavlja 13. Konačno, u Poglavlju 14, izračunate su i višestruke sume:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{mnp(m+n+p)^3}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}$$

za $(a,b)=(3,1)$ i za $(a,b)=(2,2)$. Od otvorenih problem treba posebno istaći sledeća dva:

1) Odrediti formulu za sumu:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m^a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^n}{n^b}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu^p}{p^c}, \qquad \lambda,\mu,\nu\in\{-1,1\}$$

u slučaju $a+b+c=2k$ i u slučaju $a+b+c=2k+1$.

2) Odrediti formulu za sumu:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda m+\mu n+\nu p}}{m^a n^b p^c(m+n+p)^d}, \qquad \lambda,\mu,\nu\in\{0,1\}$$

u slučaju $a+b+c+d=2k$ i u slučaju $a+b+c+d=2k+1$.

U okviru istraživanja pomenutih problema, dotaknut je i jedan od osnovnih problema u radu sa višestrukim sumama: kako izraziti sume višestrukosti s preko suma višestrukosti r ($r \leqslant s-1$). Monografija nudi neke parcijalne rezultate, ne dajući potpun odgovor na postavljeno pitanje. U svim rezultatima se pojavljuju vrednosti *Riemann*-ove ζ-funkcije.U nekim formulama se pojavljuju i izrazi oblika $\beta_r(-1)$ i $G_{(2,2)}(-1)$. Prirodno je očekivati, kad već za $\beta_{2r}(-1)$ nemamo formulu koja omogućava izračunavanje preko već poznatih veličina, da i među sumama čija je višestrukost 2 postoji takođe veličina sa takvom osobinom. Rezultati do kojih se došlo daju osnovu, u raznim izrazima datim preko $G_{(2,2)}(-1)$, i za suprotno mišljenje-stav. Ovim se otvara problem određivanja baznog skupa elemenata za sume odgovarajuće višestrukosti.

U Poglavlju 15 razmatrane su *Mordell*-ove sume oblika:

$$S_n=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{r^n s^n (r+s)^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

Za $n=2k$ gornju formulu dobili su *Subbarao* i *Sitaramachandrarao* 1985. godine. Formula za S_{2k+1} u opštem slučaju je do sada bila nepoznata, dok je za S_1 formula bila poznata još *Euler*-u. Na osnovu nekih rezultata koji su navdeni u prvim poglavljima monografije, autori su došli do formula za S_3 i S_5. Na bazi rezultata i formula izvedenih u Poglavlju 13, dobijena je formula za svaki S_{2k+1}, a navedena je i formula za S_n. U odnosu na rezultat *L. Tornheim*-a: "S_{2k+1} je polinom od $\zeta_2(1)$, $\zeta_3(1),\ldots,\zeta_{6k+3}(1)$ sa racionalnim koeficijentima", može se zaključiti iz izvedenih izraza za S_{2k+1} da je S_{2k+1} polinom drugog reda u odnosu na $\zeta_2(1),\zeta_3(1),\ldots,\zeta_{6k+3}(1)$ sa celim koeficijentima. U ovom poglavlju takođe izračunata je i suma:

$$W(m,n,p)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda r+\mu s}}{r^m s^n (r+s)^p},\quad \lambda,\mu\in\{0,1\}\,,\ \ m+n+p=2k+1$$

čime je dato poopštenje *Mordell*-ovih suma i suma sličnih njima. Da bi se došlo do navedenih rezultata korišćena je metoda izračunavanja konačnih kombinatornih suma i metoda dvostrukog sumiranja istih. U svim slučajevima pojavljuju se komplementarne sume koje omogućavaju dobijanje elegantnih konačnih analitičkih izraza.

Naredno, Poglavlje 16 monografije, posvećeno je dvostrukim sumama oblika:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{r^{\alpha}}\sum_{n=1}^{m}\frac{\mu^n}{s^b},\quad a+b=4,\ \ \lambda,\mu\in\{-1,1\}\,,\ \ r\in\{m,2m-1\}\,,\ \ s\in\{n,2n-1\}\,.$$

Ovih suma ima ukupno 40, i one su istog oblika kao i one razmatrane u Poglavlju 13. Potreba za određivanjem ovih suma leži u činjenici da one predstavljaju prvi netrivijalan slučaj u kome je $p+q=2k$. Sve formule nisu dobijene, a pored dobijenih formula imamo i veze između nekih od navedenih suma. Iz izraza koji predstavljaju odgovarajuće sume vidimo da se u njima pojavljuju $\beta_4\,(-1)$ i $G_{(2,2)}\,(-1)$. Postavlja se prirodno pitanje: u kakvoj su vezi $\beta_4\,(-1)$ i $G_{(2,2)}\,(-1)$? Izvedene formule su nastale množenjem specijalno odabranih stepenih redova i dovođenjem u vezu odgovarajućih dvostrukih suma sa određenim proizvodima.

U Poglavlju 17 navedene su razne funkcionalne relacije u oblasti: $-1\leqslant x\leqslant 1$, odnosno u nekoj njenoj podoblasti. Polazište za dobijanje tih funkcija bila je *Spencer*-ova relacija [17], kojom je dat izraz za $\zeta_3\left(\frac{x}{x-1}\right)$ u oblasti $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. Dobijeni izrazi za $G_{(2,1)}\,(x)$, $G_{(1,2)}\,(x)$ u oblasti $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, su jednostavni primeri koji to ilustruju. Za iste funkcije imamo i odgovarajuća razlaganja u oblastima $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant x<1$. Zatim su navedene formule za integrale oblika:

$$\int_0^x\frac{\log^k(1-t)}{t}\,\mathfrak{d}\,t,\quad \int_0^x\frac{\log^k(1+t)}{t}\,\mathfrak{d}\,t,\quad k=1,2,3$$

u raznim oblastima, pri čemu su navedena razlaganja funkcija $G_{(2,2)}\,(x)$, $G_{(3,1)}\,(x)$ u oblasti $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. Za $\zeta_k\left(\frac{1}{2}\right)$ poznate su formule za $k=1,2,3$. Izvedene su veze između $\zeta_4\left(\frac{1}{2}\right)$ i $G_{(2,2)}\,(-1)$. To daje osnova tvrđenju da se $G_{(2,2)}\,(-1)$ može izraziti preko $\log^4 2$, $\zeta_2\,(1)\log^2 2$, $\zeta_3\,(1)\log 2$ i $\zeta_4\,(1)$. Tome u prilog idu i formule za neke integrale, u kojima se pojavljuje $G_{(2,2)}\,(-1)$.

Izračunate su vrednosti izraza $G_{(p,q)}\left(\frac{1}{2}\right)$, u situaciji kada je $p+q=4$. Za funkcije oblika (date preko trostrukih suma):

$$G_{(a,b,c)}\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^a}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^b}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^c},\quad a+b+c=4$$

dobijene su formule u oblasti $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, kao i sledeće formule:

$$G_{(2,1,1)}\left(x\right)=-G_{(1,3)}\left(\frac{x}{x-1}\right),\quad G_{(1,2,1)}\left(x\right)=-G_{(2,2)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$G_{(1,1,2)}\left(x\right)=-G_{(3,1)}\left(\frac{x}{x-1}\right),\quad -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

U istoj oblasti važi i sledeća formula:

$$G_{(1,1,\ldots,1)_r}\left(x\right)=-\zeta_r\left(\frac{x}{x-1}\right),\quad r\geqslant 2.$$

Nadalje, u okviru Poglavlja 17, za funkcije oblika:

$$F_r\left(x\right)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{x^{k_1}}{k_1}\sum_{k_2=1}^{k_1}\frac{x^{k_2}}{k_2}\cdots\sum_{k_r=1}^{k_{r-1}}\frac{x^{k_r}}{k_r},\quad r\geqslant 2,$$

$$F_0\left(x\right)=1,\quad F_1\left(x\right)=\zeta_1(x),\quad -1\leqslant x<1,$$

dobijena je jedna funkcionalna, i kao njena posledica, jedna rekurentna relacija. Navedene su vrednosti $F_r\left(x\right)$, u situaciji kada je $r=0,1,\ldots,6$. Ostaje otvoren problem da se odredi formula za $\zeta_k(\frac{1}{2})$, $k\geqslant 4$ (ako izvedenu formulu ne smatramo odgovorom za slučaj kada je $k=4$). Kombinovanjem kombinatorne metode sumiranja i metode višestrukog sumiranja, uz korišćenje raznih funkcionalnih relacija za funkcije date ili preko višestrukih suma ili preko integrala, došlo se do rezultata navedenih u ovom poglavlju. Metod korišćen u dokazu funkcionalne relacije za $F_r(x)$ mogao bi se nazvati metodom "ulaska-izlaska" za višestruke sume.

Na osnovu rezultata do kojih je došao *H. M. Srivastava* u svom radu iz 1988. godine, a koji se odnose na nekoliko različitih grupa sumacionih formula u kojima se pojavljuju redovi u čijim članovima figuriše *Riemann*-ova zeta-funkcija (što su incijalno istraživali i *Euler* i *Goldbach*), u monografiji u Poglavlju 18 autori su se upravo bavili redovima tog tipa. Za svaku od formula navedenih u uvodu ovog poglavlja, data je formula koja poopštava navedeni rezultat i važi za prirodan broj n. Poopštenja su u vezi sa sledećim sumama (za koje su navedene odgovarajuće formule):

$$\begin{array}{llll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)-1}{k+n}, & n\geqslant 1, & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k(2k+n)}, & n\geqslant 1,\\
\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(k)-1}{k+n}, & n\geqslant 1, & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)-1}{2k+2n+1)}, & n\geqslant 0,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)-1}{k+n}, & n\geqslant 1, & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(k)}{2^k(k+n)}, & n\geqslant 1.
\end{array}$$

Ostaje otvoren problem izračunavanja sume:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)-1}{(k+n)^r},\quad r\geqslant 2,\ r,n\in\mathbb{N}.$$

Pri dobijanju navedenih rezultata, korišćena je metoda integraljenja funkcije koja je proizvod polinoma i $\log\Gamma(x)$, gde se za $\log\Gamma(x)$ koristi odgovarajući *Kumer*-ov red u oblasti $0<x<1$. Zajedničko u svim razmatranim problemima je to da su sve višestruke sume i integrali izraženi preko vrednosti *Riemann*-ova zeta-funkcije. Iako je to samo neznatan deo onoga što se može izračunati, svakako je to jedan od nepobitnih dokaza da je ta funkcija od izuzetne važnosti i u teoriji sumiranja višestrukih redova.

Kroz tekst monografije korišćena je sledeća notacija: za pozitivno A, oznaka $B=O(A)$ (što je isto kao da se navede $B\ll A$), označava da postoji apsolutna pozitivna konstanta c, takva da važi $|B|\le cA$. Pored toga, svuda je umesto ln korišćena oznaka log. U sumama po netrivijalnim nulama funkcije $\zeta(s)$, nule su numerisane prema poretku apsolutnih veličina njihovih imaginarnih delova, a ako su apsolutne vrednosti imaginarnih delova iste, onda je poredak proizvoljan.

Na kraju treba navesti tužnu činjenicu da je profesor Stevanović preminuo 2010. godine i da je to pred koautora i njegovog bliskog saradnika i kolegu, postavilo ogroman i nekada teško premostiv problem da na dovoljno kvalitetan način opiše i proširi rezultate do kojih je profesor Stevanović došao tokom svog izuzetno plodonosnog života. Koautor se može samo nadati da je taj njegov napor i želja urodio plodom i da će monografija u obliku u kome se nalazi naći svoj put do stručne čitalačke publike.

Ovaj tekst verovatno nikada ne bi ugledao svetlo dana da nije bilo i supruge profesora Stevanovića, Vere, koja je ogroman deo materijala koji se nalazio u rukopisu priredila za dalju pripremu i kompjutersku obradu. Mladen Janjić, student pokojnog profesora, je sa svoje strane odradio prelom i pripremu za štampu, zbog čega mu se ovom prilikom najtoplije zahvaljujemo.

Recenzenti, Profesor Dragomir Simeunović i Profesor Milan Tasković, sa svojim velikim znanjem i iskustvom, i uvek dobronamernim sugestijama, pružili su ogromnu pomoć i podršku u procesu pripremanja monografije, zbog čega im se ovom prilikom najsrdačnije zahvaljujemo.

Na kraju, autori posebnu zahvalnost duguju gospodinu Rodoljubu Popoviću, vlasniku privrednog društva „Atenic commerce“ iz Čačka, bez čije finansijke podrške i ogromnog razumevanja publikovanje ove monografije ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Poglavlje 1

Definicija funkcije $\zeta(s)$

1.1 Definicija funkcije $\zeta(s)$ i veze sa aritmetičkim funkcijama

Red:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + \mathrm{i}t, \ (\sigma > 1) \tag{1.1}$$

apsolutno i ravnomerno konvergira u bilo kojoj konačnoj oblasti s-ravni, u kojoj je $\sigma \geqslant 1+\delta > 1$, $(\delta > 0)$. Prema *Weierstrass*-ovom stavu za ravnomerno konvergentne redove analitičkih funkcija, red (1.1) određuje analitičku funkciju za $\sigma > 1$.

Definicija 1.1. Relacijom (1.1) definisana analitička funkcija zove se *Riemann*-ova zeta-funkcija.

Teorema 1.1. *Za $\sigma > 1$ vredi:*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}, \tag{1.2}$$

gde u proizvodu p prolazi sve proste brojeve.

Dokaz. Množeći konačno mnogo apsolutno konvergentnih redova, imamo:

$$\prod_{p \leq P} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = \prod_{p \leq P} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\Big) = 1 + \frac{1}{n_1^s} + \frac{1}{n_2^s} + \cdots \tag{1.3}$$

gde su $n_1, n_2, \ldots,$ oni prirodni brojevi čiji prosti faktori ne prelaze P. Kako su svi prirodni brojevi do P baš takvog oblika, odatle sledi da je:

$$\begin{aligned} \left|\zeta(s) - \prod_{p \leq P} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\Big)\right| \leqslant \\ &\leqslant \Big(\frac{1}{(P+1)^\sigma} + \frac{1}{(P+1)^\sigma} + \cdots\Big) \longrightarrow 0, \quad (P \longrightarrow \infty). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ekvivalentnost (1.1) i (1.2) predstavlja jednu od najznačajnih osobina funkcije $\zeta(s)$. □

Definicija 1.2. *Möbius*-ova funkcija $\mu(n)$ je definisana za sve prirodne brojeve na sledeći način:

$$\mu(1) = 1, \quad \mu(1) = (-1)^k, \tag{1.5}$$

ako je n proizvod k različitih prostih brojeva, $\mu(n) = 0$, i ako n sadrži kvadrat nekog prostog broja. Za $\mu(n)$ važe sledeće formule (videti [103], str. 26):

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & (\alpha > 1), \\ 1, & (\alpha = 1), \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^s} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right), & (\alpha > 1)\,, \\ 1, & (\alpha = 1), \end{cases} \tag{1.7}$$

gde je $\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (kanonski razvoj broja α).

Lema 1.1. *Za $\sigma > 1$ važi:*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{1.8}$$

Dokaz. Za $\sigma > 1$ je:

$$\zeta(s) \neq 0. \tag{1.9}$$

Zaista, za $\sigma > 1$ je:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{m_1^s} + \frac{1}{m_2^s} + \cdots \tag{1.10}$$

gde su m_1, m_2, ... prirodni brojevi čiji svi prosti faktori prelaze P. Dakle:

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)\right| \geq 1 - \frac{1}{(P+1)^s} - \frac{1}{(P+2)^s} - \cdots > 0 \tag{1.11}$$

za dovoljno veliko P. Odatle je $|\zeta(s)| > 0$, odnosno $\zeta(s) \neq 0$, pa postoji $\frac{1}{\zeta(s)}$. Neka je $N > 2$. Iz (1.7) je:

$$\prod_{p \leqslant N}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum 0 < n \leq N \frac{\mu(n)}{n^s} + \Sigma' \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{1.12}$$

gde su u drugoj sumi s desna samo oni n koji su veći od N. Pošto red $\sum_{\infty}^{n=1} \frac{1}{n^s}$ apsolutno konvergira za $\zeta > 1$, to $\Sigma' \frac{\mu(n)}{n^s} \longrightarrow 0$, $(N \longrightarrow \infty)$, pa kad $N \longrightarrow \infty$, sledi relacija (1.8). □

Definicija 1.3. *Von Mangoldt*-ova funkcija $\Lambda(n)$ je definisana za sve prirodne brojeve na sledeći način:

$$\Lambda(n) = \log p, \tag{1.13}$$

za $n = p^m$, p prost, m prirodan broj, $\Lambda(n) = 0$ za druge n.

Za $\Lambda(n)$ važi:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n, \tag{1.14}$$

(videti [112], str. 79).