

Biljana Deretić-Stojanović
Šerif Dunica

OTPORNOST MATERIJALA

PETO IZDANJE

Beograd, 2018.

Dr Biljana Deretić-Stojanović, dipl. građ. inž.,
vanredni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Dr Šerif Dunica, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

OTPORNOST MATERIJALA

peto neizmenjeno izdanje

Recenzenti:

Dr Branislav Ćorić, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Dr Stanko Brčić, dipl. građ. inž.,
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Beogradu

Izdavači:

Građevinski fakultet,
Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73/I
Akademska misao, Beograd

Za izdavača

Prof. Dr Branko Božić

Štampa:

Akademska misao, Beograd

Tiraž:

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-715- 8

SADRŽAJ

PREDGOVOR	11
UVOD	13
I OPŠTA TEORIJA	15
1 ANALIZA NAPONA	17
1.1 SPOLJAŠNJE I UNUTRAŠNJE SILE. POJAM NAPONA.....	17
1.2 STANJE NAPONA U TAČKI. TENZOR NAPONA.....	20
1.3 VEZA IZMEĐU VEKTORA NAPONA I TENZORA NAPONA (CAUCHY-EVE JEDNAČINE).....	22
1.4 JEDNAČINE RAVNOTEŽE. STAV O KONJUGOVANOSTI SMIČUĆIH NAPONA. POVRŠINSKI USLOVI	24
1.4.1 Jednačine ravnoteže.....	25
1.4.2 Stav o konjugovanosti smičućih napona	26
1.4.3 Površinski uslovi.....	28
1.5 STAV O KONJUGOVANOSTI NAPONA.....	30
1.6 PROMENA KOMPONENTATA NAPONA PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA.....	33
1.7 GLAVNI NAPONI I PRAVCI GLAVNIH NAPONA. INVARIJANTE STANJA NAPONA.....	34
1.8 MOHR-OVI KRUGOVI NAPONA.....	40
1.9 EKSTREMNE VREDNOSTI SMIČUĆIH NAPONA.....	42
1.10 RAZLAGANJE TENZORA NAPONA NA SFERNI I DEVIJATORSKI DEO.....	45
1.11 DVOOSNO (RAVANSKO) STANJE NAPONA.....	45
1.11.1 Komponentni naponi.....	45
1.11.2 Glavni naponi i glavne ose	49
1.11.3 Mohr-ov krug napona.....	52
1.11.4 Primeri dvoosnog stanja napona	57
1.12 REZIME.....	61
1.13 TEST- Analiza napona.....	62
1.14 REŠENJE TESTA- Analiza napona.....	64
2 ANALIZA DEFORMACIJA	67
2.1 DEFORMACIJA TELA. VEKTOR POMERANJA.....	67
2.2 RAZLAGANJE VEKTORA POMERANJA U OKOLINI TAČKE	68
2.3 DILATACIJA I KLIZANJE.....	69
2.4 VEZA IZMEĐU KOMPONENTNIH POMERANJA I KOMPONENTNIH DEFORMACIJA. TENZOR DEFORMACIJE.....	71

2.5	GLAVNE DILATACIJE I PRAVCI GLAVNIH DILATACIJA INVARIJANTE STANJA DEFORMACIJE. KUBNA DILATACIJA....	78
2.6	RAZLAGANJE TENZORA DEFORMACIJE NA SFERNI I DEVIJATORSKI DEO	81
2.7	MOHR-OVI KRUGOVI DEFORMACIJE.....	82
2.8	DVOOSNO (RAVANSKO) STANJE DEFORMACIJE. MOHR-OVI KRUGOVI DEFORMACIJE.....	83
2.9	ODREĐIVANJE KOMPONENTNIH POMERANJA IZ POZNATIH KOMPONENTNIH DEFORMACIJA. USLOVI KOMPATIBILNOSTI DEFORMACIJA.....	87
2.10	REZIME.....	96
2.11	TEST: Analiza deformacije.....	98
2.12	REŠENJE TESTA -Analiza deformacije.....	99
3	KONSTITUTIVNE JEDNAČINE	101
3.1	UVODNE NAPOMENE.....	101
3.2	KATEGORIZACIJA MATERIJALA.....	101
3.3	EKSPERIMENTALNI PODACI.....	102
3.3.1	Test istežanja štapa.....	103
3.3.2	Uticaj vremena na ponašanje materijala.....	108
3.4	IDEALNA TELA I NJIHOVI REOLOŠKI MODELI.....	110
3.5	IDEALNO ELASTIČNO (HOOKE-OVO) TELO.....	111
3.5.1	Konstitutivne jednačine pri jednoosnom naprežanju.....	111
3.5.2	Konstitutivne jednačine za izotropan materijal (Generalisani Hooke-ov zakon).....	112
3.5.3	Jednačine linearne termoelastičnosti (Neumann-Duhamel-ove jednačine).....	119
3.5.4	Konstitutivne jednačine za anizotropan materijal.....	121
3.6	LINEARNO VISKOELASTIČNO TELO.....	124
3.6.1	Maxwell-ov model.....	124
3.6.2	Kelvin-ov (ili Voigt-ov model).....	126
3.7	IDEALNO PLASTIČNO TELO.....	128
3.7.1	Idealizacija ponašanja materijala u plastičnoj oblasti.....	128
3.7.2	Uslov tečenja materijala.....	129
3.7.3	Konstitutivne jednačine plastičnosti.....	131
3.8	REZIME.....	132
3.9	TEST- Konstitutivne jednačine.....	133
3.10	REŠENJE TESTA- Konstitutivne jednačine.....	135

4 ODREĐIVANJE NAPONA I DEFORMACIJE

U NAPREGNUTOM TELU	137
4.1 REKAPITULACIJA OSNOVNIH JEDNAČINA.....	137
4.2 FORMULACIJA PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI.....	139
4.3 METODE REŠAVANJA PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI....	140
4.3.1 Navier-ove jednačine.....	140
4.3.2 Beltrami-Michell-ove jednačine.....	141
4.3.3 Poluobratna (semi-inverzna) metoda.....	142
4.3.4 Numeričke i eksperimentalne metode.....	142
4.4 ZAKON SUPERPOZICIJE. SAINT-VENANT-OV PRINCIP.....	143
4.5 REZIME.....	144
4.6 TEST- Određivanje napona i deformacija u napregnutom telu.....	145
4.7 REŠENJE TESTA- Određivanje napona i deformacija u napregnutom telu.....	146

5 ENERGIJA DEFORMACIJE **149**

5.1 RAD SPOLJAŠNIH SILA. ENERGIJA DEFORMACIJE.....	149
5.2 NELINEARNO ELASTIČNO TELO IZLOŽENO DEJSTVU JEDNE SILE.....	150
5.3 LINEARNO ELASTIČNO TELO.....	151
5.3.1 Telo izloženo dejstvu jedne sile.....	151
5.3.2 Telo izloženo dejstvu sistema sila. Generalisane sile i generalisana pomeranja.....	153
5.3.3 Uticajni koeficijenti.....	154
5.4 ENERGIJA DEFORMACIJE I KOMPLEMENTARNA ENERGIJA IZRAŽENI POMOĆU KOMPONENATA NAPONA.....	157
5.4.1 Nelinearno elastično telo.....	157
5.4.2 Linearno elastično, izotropno telo.....	160
5.5 STAVOVI UZAJAMNOSTI.....	163
5.5.1 Betti-ev stav o uzajamnosti radova.....	163
5.5.2 Maxwell-ov stav o uzajamnosti pomeranja.....	165
5.6 CASTIGLIAN-OVI STAVOVI.....	166
5.6.1 Prvi Castigliano-v stav.....	166
5.6.2 Drugi Castigliano-v stav.....	167
5.7 REZIME.....	169
5.8 TEST- Energija deformacije.....	170
5.9 REŠENJE TESTA- Energija deformacije.....	171

II TEORIJA GREDE **173****6 GREDNI NOSAČ** **175**

6.1 POSTAVKA PROBLEMA.....	175
6.2 VEZE I REAKCIJE VEZA.....	176

6.3	UNUTRAŠNJE SILE U POPREČNOM PRESEKU GREDE (SILE U PRESEKU).....	178
6.4	DIFERENCIJALNE VEZE IZMEĐU SILA U PRESEKU I LINIJSKI PODELJENOG OPTEREĆENJA.....	179
6.5	VEZE IZMEĐU SILA U PRESEKU I KOMPONENATA NAPONA...	180
7	GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE	
	POPREČNOG PRESEKA GREDE	181
7.1	STATIČKI MOMENTI I TEŽIŠTE POPREČNOG PRESEKA.....	181
7.2	MOMENTI INERCIJE POPREČNOG PRESEKA GREDE.....	184
7.2.1	Definicija momenata inercije.....	184
7.2.2	Promena momenata inercije pri translaciji koordinatnog sistema (Steiner-ova teorema).....	189
7.2.3	Promena momenata inercije pri rotaciji koordinatnog sistema.....	195
7.2.4	Glavne ose i glavni momenti inercije.....	196
7.2.5	Mohr-ov krug inercije.....	198
7.2.6	Poluprečnici inercije i elipsa inercije.....	198
7.3	GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE TANKOZIDNIH PRESEKA..	202
7.3.1	Sektorska koordinata.....	202
7.3.2	Sektorske karakteristike poprečnog preseka. Centar smicanja. Normirana sektorska koordinata.....	204
7.3.3	Primena Vereščagin-ovog postupka za izračunavanje geometrijskih karakteristika tankozidnih preseka.....	209
7.4	REZIME.....	213
7.5	TEST- Geometrijske karakteristike poprečnog preseka grede.....	215
7.6	REŠENJE TESTA- Geometrijske karakteristike poprečnog preseka grede	217
8	GEDA OPTEREĆENA PODUŽNIM SILAMA	219
8.1	POSTAVKA PROBLEMA.....	219
8.2	IZRAZI ZA NORMALNI NAPON.....	220
8.3	AKSIJALNO NAPREZANJE GREDE.....	223
8.3.1	Izrazi za komponente napona, deformacije i pomeranja.....	223
8.3.2	Dimenzionisanje pri aksijalnom naprezanju.....	227
8.4	ČISTO PRAVO SAVIJANJE GREDE.....	229
8.4.1	Elementarna teorija čistog pravog savijanja.....	230
8.4.2	Deformacija grede pri čistom pravom savijanju prema teoriji elastičnosti.....	233
8.4.3	Dimenzionisanje pri čistom pravom savijanju.....	235
8.5	ČISTO KOSO SAVIJANJE	240
8.5.1	Izraz za normalni napon.....	240
8.5.2	Deformacije i pomeranja grede pri čistom kosom savijanju.....	242

8.5.3	Dimenzionisanje pri čistom kosom savijanju.....	244
8.6	EKSCENTRIČNO NAPREZANJE GREDE.....	246
8.6.1	Izraz za normalni napon. Neutralna osa.....	246
8.6.2	Jezgro preseka.....	249
8.6.3	Dimenzionisanje ekscentrično napregnute grede.....	251
8.6.4	Raspored napona u sredini koja prenosi samo napone pritiska.....	254
8.7	REZIME.....	247
8.8	TEST- Greda opterećena podužnim silama.....	259
8.9	REŠENJE TESTA- Greda opterećena podužnim silama.....	261
9	TORZIJA GREDE	263
9.1	ELEMENTARNA TEORIJA TORZIJE GREDE KRUŽNOG I PRSTENASTOG POPREČNOG PRESEKA	263
9.2	TORZIJA GREDE PROIZVOLJNOG PUNOG POPREČNOG PRESEKA.....	267
9.3	TORZIJA GREDE ELIPTIČNOG I KRUŽNOG POPREČNOG PRESEKA.....	276
9.4	TORZIJA GREDE PRAVOUGAONOG POPREČNOG PRESEKA....	278
9.5	TORZIJA GREDE OTVORENOG TANKOZIDNOG PROFILA.....	280
9.5.1	Poprečni presek u obliku uskog pravougaonika.....	280
9.5.2	Otvoren tankozidni presek proizvoljnog oblika.....	282
9.6	TORZIJA GREDE ZATVORENOG TANKOZIDNOG PROFILA.....	284
9.7	DIMENZIONISANJE GREDE PRI TORZIJI.....	288
9.8	DODATNE NAPOMENE O TORZIJI GREDE.....	289
10	SAVIJANJE GREDE SILAMA	301
10.1	UVODNE NAPOMENE.....	301
10.2	TEHNIČKA TEORIJA SAVIJANJA GREDE HIPOTEZA ŽURAVSKOG.....	305
10.3	SAVIJANJE GREDE OTVORENOG TANKOZIDNOG PROFILA....	311
10.4	SAVIJANJE GREDE ZATVORENOG TANKOZIDNOG PROFILA...	322
10.4.1	Zatvoreni tankozidni profil proizvoljnog oblika.....	322
10.4.2	Zatvoreni tankozidni profil sa osom simetrije koja leži u ravni savijanja	324
10.5	GLAVNI NAPONI KOD GREDE SAVIJENE SILAMA.....	325
10.6	DIMENZIONISANJE GREDE SAVIJENE SILAMA	328
10.7	ELASTIČNA LINIJA GREDE SAVIJENE SILAMA.....	332
10.7.1	Diferencijalna jednačina elastične linije grede.....	332
10.7.2	Određivanje ugiba i nagiba grede metodom fiktivnog nosača (Mohr-Maxwell-ova analogija).....	339
10.8	REZIME.....	346
10.9	TEST- Savijanje silama.....	348
10.10	REŠENJE TESTA- Savijanje silama	349

11 OGRANIČENA TORZIJA GREDE OTVORENOG TANKOZIDNOG PROFILA	351
11.1 UVOD.....	351
11.2 OSNOVNE PRETPOSTAVKE. DEFORMACIJA GREDE.....	352
11.3 IZRAZI ZA KOMPONENTE NAPONA.....	355
11.4 SILE U PRESECIMA. DIFERENCIJALNA JEDNAČINA OGRANIČENE TORZIJE.....	356
11.5 REZIME.....	366
11.6 TEST- Ograničena torzija.....	367
11.7 REŠENJE TESTA- Ograničena torzija	368
12 KOMBINOVANO (SLOŽENO) NAPREZANJE GREDE	369
12.1 UVODNE NAPOMENE.....	369
12.2 KOMPONENTNI NAPONI PRI KOMBINOVANOM NAPREZANJU GREDE.....	369
12.2.1 Greda punog poprečnog preseka.....	369
12.2.2 Greda otvorenog tankozidnog profila.....	374
12.3 ENERGIJA DEFORMACIJE PRI KOMBINOVANOM OPTEREĆENJU.....	377
12.4 ODREĐIVANJE POMERANJA PRIMENOM DRUGOG CASTIGLIANO-VOG STAVA (MOHR-OV POSTUPAK).....	380
12.5 REZIME.....	385
13 STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI	387
13.1 UVODNE NAPOMENE. METODOLOGIJA REŠAVANJA STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA.....	387
13.2 STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI PRI AKSIJALNOM NAPREZANJU GREDE.....	390
13.3 STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI PRI TORZIJI GREDE.....	392
13.4 STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI PRI SAVIJANJU GREDE SILAMA.....	394
13.5 REZIME.....	400
13.6 TEST- Statički neodređeni problemi	401
13.7 REŠENJE TESTA- Statički neodređeni problemi	402
14 SAVIJANJE GREDE OPTEREĆENE AKSIJALNOM SILOM. STABILNOST RAVNOTEŽE GREDE	403
14.1 UVOD	403
14.2 DIFERENCIJALNA JEDNAČINA GREDE PREMA TEORIJI DRUGOG REDA.....	404
14.3 STABILNOST RAVNOTEŽNOG OBLIKA. KRITERIJUMI STABILNOSTI.....	408

14.4	IZVIJANJE GREDE U ELASTIČNOJ OBLASTI. EULER-OVI SLUČAJEVI IZVIJANJA.....	411
14.4.1	Greda zglavkasto oslonjena na oba kraja.....	411
14.4.2	Greda ukleštena na jednom i slobodna na drugom kraju.....	413
14.4.3	Greda ukleštena na jednom i zglavkasto oslonjena na drugom kraju.....	415
14.4.4	Greda ukleštena na oba kraja.....	416
14.4.5	Slobodna dužina izvijanja grede.....	418
14.5	DIMENZIONISANJE GREDE PREMA IZVIJANJU.....	419
14.6	REZIME.....	425
14.7	TEST- Savijanje grede opterećene aksijalnom silom. Stabilnost ravnoteže grede	426
14.8	REŠENJE TESTA- Savijanje grede opterećene aksijalnom silom. Stabilnost ravnoteže grede	428
15	ELASTO-PLASTIČNA ANALIZA GREDE	429
15.1	UVODNE NAPOMENE	429
15.2	ELASTO-PLASTIČNA ANALIZA AKSIJALNO NAPREGNUTE GREDE	430
15.3	ČISTO PRAVO ELASTO-PLASTIČNO SAVIJANJE GREDE	431
15.4	ELASTO-PLASTIČNO SAVIJANJE GREDE SILAMA	439
15.5	PRIMENA PRINCIPA VIRTUALNIH POMERANJA.....	444
15.6	GRANIČNA NOSIVOST KOD STATIČKI ODREĐENIH NOSAČA	445
15.7	GRANIČNA NOSIVOST KOD STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA.....	447
15.7.1	Direktna metoda (metoda inkrementalne plastifikacije).....	448
15.7.2	Teoreme plastične (granične) analize.....	454
15.7.3	Primena statičke teoreme granične analize.....	456
15.7.4	Primena kinematičke teoreme granične analize.....	458
15.8	REZIME	460
15.9	TEST- Elasto-plastična analiza grede	461
15.10	REŠENJE TESTA- Elasto-plastična analiza grede	463
16	DIMENZIONISANJE GREDNOG NOSAČA	465
16.1	UVOD	465
16.2	DIMENZIONISANJE PREMA DOZVOLJENIM NAPONIMA.....	466
16.2.1	Dimenzionisanje pri jednoosnom stanju napona. Dozvoljeni napon. Koficijent sigurnosti	466
16.2.2	Dimenzionisanje pri troosnom stanju napona. Hipoteze o lomu. Uporedni (ekvivalentni) napon	467
16.2.3	Uporedni naponi pri dvoosnom stanju napona. Upoređenje raznih hipoteza o lomu	471

16.3	DIMENZIONISANJE PREMA GRANIČNOJ NOSIVOSTI....	475
16.4	REZIME	478
16.5	TEST- Dimenzionisanje grednog nosača	479
16.6	REŠENJE TESTA-Dimenzionisanje grednog nosača	479
LITERATURA		481

Napomena: *Materija koja pripada poglavljima koja su u Sadržaju zatamnjena se predaje u okviru predmeta Otpornost materijala 2.*

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

Peto izdanje ovog udžbenika je preslikano četvrto izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, januar 2018. god.

Autori

PREDGOVOR ČETVRTOM IZDANJU

Četvrto izdanje ovog udžbenika je preslikano treće izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, septembar 2016. god.

Autori

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Treće izdanje ovog udžbenika je preslikano drugo izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, maj 2014. god.

Autori

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Drugo izdanje ovog udžbenika je preslikano prvo izdanje u kome su prethodno izvršene popravke uočenih grešaka.

Beograd, novembar 2009. god.

Autori

PREDGOVOR

Predloženi tekst ovog udžbenika predstavlja materiju koja je obuhvaćena novim nastavnim programima predmeta Otpornost materijala I i Otpornost materijala II na Građevinskom fakultetu u Beogradu, i po kome se predaje od školske 2006/07 godine. Iako je ovaj udžbenik prvenstveno namenjen studentima građevinskih fakulteta, on može biti koristan i drugim tehničkim strukama (arhitektura, mašinstvo i dr.). Predmet Otpornost materijala I slušaju studenti svih odseka u trećem semestru, a predmet Otpornost materijala II samo studenti konstruktivnog odseka u četvrtom semestru. Imajući u vidu da je materija koja je obuhvaćena programom predmeta Otpornost materijala II, manjeg obima, da predstavlja dopunu i nadogradnju materije koja se izlaže u predmetu Otpornost materijala I, pa je samim tim neraskidivo povezana s njom, autori su odlučili da u okviru ovog udžbenika predstave integralni tekst oba predmeta. Na taj način će studenti konstruktivnog odseka moći lakše da prate materiju oba predmeta, a studentima ostalih odseka dodatna materija može biti od koristi. Neke oblasti koje su izložene u okviru ovog udžbenika mogu biti od koristi i inženjerima iz tehničke prakse. Sadržaj udžbenika je podeljen na dva dela: Opšta teorija i Teorija grede.

Materija prvog dela (**Opšta teorija**) izložena je kroz pet poglavlja. Prvim i drugim poglavljem obuhvata se analiza napona i analiza malih deformacija. Naglašava se tenzorski karakter stanja napona i stanja deformacije bez insistiranja na tenzorskoj notaciji, tako da se svi potrebni izrazi prikazuju u razvijenom obliku. U trećem poglavlju se uspostavlja veza između napona i deformacije, uvodi se

pojam idealnih tela i posebno se definišu konstitutivne jednačine za idealno elastično, idealno plastično i viskoelastično telo. U četvrtom poglavlju se daje prikaz opštih jednačina teorije elastičnosti i obrađuju metode rešavanja ovog sistema jednačina. U petom poglavlju se formulišu pojmovi i osnovni stavovi vezani za energiju deformacije. Ovih pet poglavlja predstavlja teorijsku osnovu za analizu grednog nosača u različitim uslovima naprezanja koja je predmet drugog, glavnog i obimnijeg, dela udžbenika.

Drugi deo (**Teorija grede**) odnosi se na analizu naprezanja grednog nosača i sadrži sledećih jedanaest poglavlja. Na početku, u šestom i sedmom poglavlju se daje kratak prikaz sila u preseku i njihova veza sa naponima, i definišu se geometrijske karakteristike punog i tankozidnog poprečnog preseka. U osmom poglavlju se obrađuju naprezanja koja se odnose na linearno stanje napona, a to su: aksijalno naprezanje, čisto pravo i čisto koso savijanje i ekscentrično naprezanje. Torzija grednog nosača se obrađuje u devetom poglavlju. Rešava se prvo problem torzije grede kružnog poprečnog preseka na nivou elementarne teorije, a potom se, koristeći Saint-Venant-ov poluobratni postupak, rešava problem torzije grede čiji je presek proizvoljnog oblika, pa se prikazuje rešenje za eliptični i pravougaoni presek. Takođe se daje i rešenje torzije grede otvorenog i zatvorenog tankozidnog profila. U desetom poglavlju se prikazuje savijanje grede silama koristeći tehničku teoriju savijanja grede koja se zasniva na hipotezi Žuravskog, a daje se rešenje i za tankozidni otvoreni i zatvoreni presek. Kratak prikaz ograničene torzije otvorenog tankozidnog preseka dat je u poglavlju jedanaest. Kombinovano naprezanje grednog nosača se razmatra u poglavlju dvanaest. U poglavlju trinaest se obrađuju statički neodređeni problemi pri aksijalnom naprezanju, torziji i savijanju silama. Zatim se, u poglavlju četrnaest razmatra savijanje grede opterećene aksijalnom silom i problem stabilnosti grede i formuliše dimenzionisanje prema izvijanju. Petnaesto poglavlje obuhvata elasto-plastičnu analizu grede i određivanje graničnog opterećenja. I na kraju, u poglavlju šesnaest, prikazano je dimenzionisanje grednog nosača prema dozvoljenim naponima, uz formulisanje uporednih napona za različite hipoteze loma, i dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti.

Radi lakšeg razumevanja i dopune izloženih teorijskih postavki u tekstu je dat veliki broj rešenih primera (68), a na kraju svakog poglavlja, priložen je i kratak rezime materije koja se u tom poglavlju izlaže. Takođe je, da bi se proverilo stečeno znanje pri učenju ove materije, na kraju svakog poglavlja, dat i test sa pitanjima i ponuđenim odgovorima, kao i rešenja tog testa.

Autori su veoma zahvalni profesorima dr Branislavu Ćoriću i dr Stanku Brčiću na izvršenoj recenziji rukopisa, kao i studentu arhitekture Jovani Stojanović za pomoć pri pripremi udžbenika za štampu.

Beograd, april 2008. god.

Autori

UVOD

Pod uticajem spoljašnjih sila sva se tela više ili manje deformišu, tj. menjaju svoj oblik i zapreminu. Iz Fizike znamo da je telo sastavljeno od odvojenih delića, molekula, koji su međusobno povezani privlačnim, molekularnim silama. Pri deformaciji tela menja se međusobni položaj molekula, menjaju se i unutrašnje sile težeći pri tome da uspostave prvobitni raspored molekula. U suštini, telo predstavlja *diskretnu sredinu*.

Međutim, makroskopski posmatrano, može se usvojiti predstava o telu kao neprekidnom skupu materijalnih tačaka, *neprekidnoj materijalnoj sredini, kontinuumu*, pa se stoga govori o *Mehanici neprekidnih sredina* ili *Mehanici kontinuumu*. Prema ovoj koncepciji usvajamo da se unutrašnje sile, koje predstavljaju rezultat dejstva spoljašnjih sila, mogu definisati samo kao površinske sile preko zamišljenih presečnih površina u telu, pa time u stvari ponašanje mnoštva molekula zamenjujemo nekim prosečnim vrednostima.

Uvodeći pojam kontinuumu razlikujemo čvrsto telo od fluida, a u okviru fluida, tečnosti od gasova, tako da postoje i posebne naučne discipline koje ih izučavaju, tj. *Mehanika čvrstog tela* i *Mehanika fluida*.

U okviru Mehanike čvrstih tela definiše se *kruto (nedeformabilno) telo*, kod koga se rastojanja između tačaka ne menjaju i na njemu se izvode svi zakoni Statike i Dinamike. Međutim, stvarna tela pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja menjaju svoj oblik i zapreminu, tj. predstavljaju *deformabilna tela*. Ponašanje ovakvih tela se izučava u *Mehanici deformabilnog tela*.

U okviru Mehanike deformabilnog tela razvijen je čitav niz *naučno-tehničkih disciplina*. U zavisnosti od vrste deformacije koju tretiraju razlikuje se *Teorija elastičnosti, Teorija plastičnosti* i *Teorija viskoelastičnosti*. Ako se zanemare, odnosno uzmu u obzir efekti inercijalnih sila, onda je reč o *Statici*, odnosno *Dinamici deformabilnog tela*. U zavisnosti od veličine deformacija razlikujemo *Teoriju malih (infinitesimalnih) deformacija* i *Teoriju velikih (konačnih) deformacija*. Problem nastanka prsline i loma opterećenog tela predmet je *Mehanike loma*. Uticaj termičkih efekata se izučava u *Termoelastičnosti, Termoplastičnosti* i *Termoviskoelastičnosti*. Osim toga, u zavisnosti od oblika i geometrije posmatranog tela, razvile su se posebne teorije, kao na primer *Teorija grede* i *Teorija ploča i ljuski (Teorija površinskih nosača)*. Naučna disciplina koja se bavi mehaničkim osobinama raznih kategorija tzv. idealnih tela kojima se aproksimira ponašanje stvarnih materijala naziva se *Reologija*.

Ovaj udžbenik predstavlja samo uvod u Mehaniku deformabilnog tela i odnosi se na rešavanje problema od važnosti za tehničku praksu. Oslanjajući se na Teoriju elastičnosti, Teoriju plastičnosti, Teoriju viskoelastičnosti, Teoriju infinitezimalne deformacije i Teoriju grede, uvodeći određene hipoteze i uprošćenja, razvijena je posebna tehnička disciplina **Otpornost materijala**. Složen matematički aparat koji se koristi u navedenim teorijama čini njihovu primenu u inženjerskoj praksi gotovo nepristupačnom. Zadatak Otpornosti materijala je da uspostavi jednostavne i pogodne metode proračuna, ali pri tome i dovoljno tačne. Neka rešenja se izvode i elementarno, uvodeći izvesne hipoteze o deformaciji grede, i upoređuju se sa odgovarajućim rešenjima dobijenim prema strožijim teorijama. Opravdanost uvedenih pretpostavki potvrđuje se i poređenjem sračunatih vrednosti i onih dobijenih eksperimentima.

Mada se u Otpornosti materijala telo tretira kao deformabilno, neki stavovi i zaključci Mehanike krutog tela imaju u Otpornosti materijala veoma važnu primenu. Sva tela koja miruju ponašaju se kao kruta, jer im se rastojanja između tačaka ne menjaju. Prema tome, kada se pod dejstvom spoljašnjih sila deformacija tela završi, ono prelazi u stanje relativnog mirovanja, tada za njega važe svi stavovi i zakoni Mehanike krutog tela, koji se mogu proširiti osnovnom hipotezom Otpornosti materijala i na elementarne delove tog tela. **Osnovna hipoteza Otpornosti materijala glasi:** za svaki elementarni deo, koji zamišljamo izdvojen iz nekog napregnutog deformabilnog tela, važe za skup unutrašnjih i spoljašnjih sila koje ga napadaju, odnosno prenose se preko presečnih površina ovog delića, isti zakoni Mehanike kao i za kruto telo.

Razvoj Mehanike deformabilnog tela počinje u 17. veku radovima Galilei-a, Hooke-a i Mariotte-a, da bi svoj veliki napredak doživela u 18. i 19. veku izvanrednim rezultatima Bernoulli-ja, Euler-a, Navier-a, Lagrange-a Green-a i Cauchy-ja, koji su postavili osnove Matematičke teorije elastičnosti. Niz drugih istraživača s kraja 19. veka dali su veliki doprinos Teoriji elastičnosti: Saint-Venant, Kirchhoff, Kelvin, Poisson, Lamé, Airy, Boussinesq, Clapeyron, Betti, Maxwell i drugi. U 20. veku razvijaju se nove metode rešavanja već formulisanih jednačina Teorije elastičnosti. U tom domenu značajan doprinos dali su Rayleigh, Love, Michell, Galerkin, Mushelišvili, Timošenko i drugi.

Teorija neelastičnih deformacija, kao što su viskoelastične i plastične deformacije, počinju da se razvijaju tek u 20. veku. Autori koji su dali značajniji doprinos iz ove oblasti su Tresca, Huber, Von Mises, Hencky, Prandtl, Reuss, Prager, kao i veliki broj savremenih istraživača.

I DEO

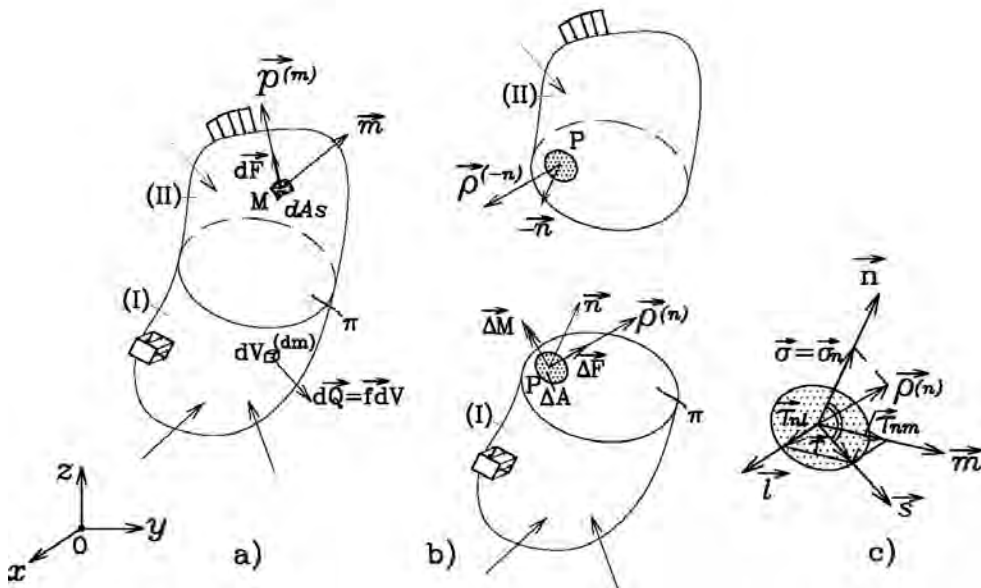
OPŠTA TEORIJA

Glava 1

ANALIZA NAPONA

1.1 SPOLJAŠNJE I UNUTRAŠNJE SILE. POJAM NAPONA

Posmatramo deformabilno telo (sl. 1.1.a) koje je u ravnoteži pod dejstvom *spoljašnjih sila*. Spoljašnje sile mogu biti *zapreminske* ili *površinske*.



Slika 1.1

Zapreminske spoljašnje sile deluju na svaki element zapremine tela. Ako se sa dV označi element zapremine tela u okolini neke tačke tada se zapreminska sila koja deluje na taj element izražava na sledeći način:

$$d\vec{Q} = \vec{f}dV, \quad (1.1)$$

gde je \vec{f} sila po jedinici zapremine:

$$\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}, \quad (1.2)$$

f_x, f_y, f_z su komponente zapreminske sile u pravcu koordinatnih osa x, y, z , a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori osa x, y, z .

Zapreminska sila koja deluje na telo konačne zapremine V je:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{f}dV. \quad (1.3)$$

Karakteristični primeri zapreminskih sila su gravitacione i inercijalne sile.

Površinske spoljašnje sile deluju preko spoljašnje površi tela. Površinska sila koja deluje na beskonačno mali element dA_s na spoljašnjoj površi tela u okolini tačke M iznosi:

$$d\vec{F} = \vec{p}^{(m)} dA_s, \quad (1.4)$$

gde je $\vec{p}^{(m)}$ **specifično površinsko opterećenje** u tački M u kojoj je jedinični vektor spoljašnje normale \vec{m} . Specifično površinsko opterećenje $\vec{p}^{(m)}$ predstavlja silu po jedinici površine.

Kontaktne sile između dva ili više tela ili sile usled hidrostatičkog pritiska su primeri površinskih sila. Spoljašnje površinske sile mogu da budu koncentrisane, ako deluju u pojedinim diskretno raspoređenim tačkama spoljašnje površi tela, ili mogu biti kontinualno raspoređene po toj površi.

Kao posledica dejstva spoljašnjih sila ili dejstva nekih drugih uticaja kao što su neravnomerno zagrevanje tela, sleganje oslonaca i sl., telo se deformiše i u njemu se javljaju **unutrašnje sile - naponi**. Usvaja se da unutrašnje sile deluju po zamišljenim presečnim površinama unutar tela. Uočimo jednu presečnu površ čiji je položaj u prostoru određen vektorom spoljašnje normale \vec{n} a kojom je telo podeljeno na delove (I) i (II) (sl. 1.1.b). Kako ovi delovi moraju biti u ravnoteži, prema aksiomu o vezama, moraju se uticaji jednog dela tela na drugi zameniti unutrašnjim silama koje deluju po kontaktnoj površini, a to je ilustrovano na jednom malom delu površine ΔA . Na površi π uočimo tačku P i konačno mali element površine ΔA oko te tačke. Unutrašnje sile koje deluju na površinu ΔA redukuju se na tačku P, tako se dobija glavni vektor $\Delta\vec{F}$ i glavni moment $\Delta\vec{M}$.

Pretpostavićemo da veličina ΔA teži nuli, ali tako da tačka P stalno ostaje unutar elementa površine ΔA , tada će glavni vektor $\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$ teži nuli, a $\frac{\Delta\vec{M}}{\Delta A}$ konačnoj vrednosti $\vec{p}^{(n)}$, tj:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{M}}{\Delta A} = 0, \quad \vec{p}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}. \quad (1.5)$$

Veličina $\vec{p}^{(n)}$ se naziva **napon** ili **vektor napona** (vektor totalnog napona) u tački P, za presečnu ravan čija je normala \vec{n} . U nekoj drugoj tački ravni π napon će biti u opštem slučaju različit od napona u tački P. Takođe, za različite presečne ravni kroz posmatranu tačku P, napon će biti različit. Znači, napon je funkcija položaja i funkcija presečne ravni kroz datu tačku, tj.:

$$\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(n)}(x, y, z). \quad (1.6)$$

S obzirom da se telo tretira kao neprekidna sredina, kontinuum, sledi da se u dvema bliskim tačkama, a za paralelne presečne ravni, naponi veoma malo razlikuju. Prema tome, ako se posmatra infinitezimalna okolina tačke P, može se pretpostaviti da je za paralelne presečne ravni veličina napona u svim njenim tačkama približno jednaka, tj. **u okolini tačke stanje napona je homogeno¹**.

Napon $\vec{\rho}^{(n)}$ se javlja kao rezultat dejstva dela (II) na deo (I) u tački P (sl.1.1.b). Ako se posmatra dejstvo dela (I) na deo (II) u toj tački, dobija se napon po intezitetu jednak naponu $\vec{\rho}^{(n)}$ ali suprotnog smera, a pri tome je i vektor spoljašnje normale orijentisan u suprotnom smeru ($-n$), tako da je:

$$\vec{\rho}^{(-n)} = -\vec{\rho}^{(n)} . \quad (1.7)$$

Dimenzija napona je sila/površina, na primer $N/m^2 = Pa$ (**paskal**).

Vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$ se može razložiti na dve ortogonalne komponente: komponentu $\vec{\sigma}$ koja leži u pravcu vektora normale presečne ravni i komponentu $\vec{\tau}$ u pravcu jediničnog vektora \vec{s} koji leži u presečnoj ravni i ravni određenoj vektorima \vec{n} i $\vec{\rho}^{(n)}$ (sl. 1.1.c):

$$\vec{\rho}^{(n)} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{s} , \quad (1.8)$$

$$\sigma = \vec{\rho}^{(n)} \cdot \vec{n} , \quad \tau = \vec{\rho}^{(n)} \cdot \vec{s} , \quad (1.9)$$

$$\tau = \sqrt{|\vec{\rho}^{(n)}|^2 - \sigma^2} . \quad (1.10)$$

Komponenta $\vec{\sigma}$ se naziva **normalni napon**, a komponenta $\vec{\tau}$ **smičući (tangencijalni) napon**.

Normalni napon $\vec{\sigma}$ se još obeležava sa $\vec{\sigma}_n$.

Smičući napon $\vec{\tau}$, koji se naziva i **totalni smičući napon**, se može razložiti na dve ortogonalne komponente $\vec{\tau}_{nl}$ i $\vec{\tau}_{nm}$ u pravcima jediničnih vektora \vec{l} i \vec{m} koji takođe leže u presečnoj ravni (sl. 1.1.c), pa se tada vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$ može izraziti na sledeći način:

$$\vec{\rho}^{(n)} = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nl} \vec{l} + \tau_{nm} \vec{m} . \quad (1.11)$$

Projekcije σ_n , τ_{nl} i τ_{nm} su pozitivne ako komponente vektora imaju smer jediničnih vektora \vec{n} , \vec{l} i \vec{m} . Smičući naponi se obeležavaju sa dva indeksa

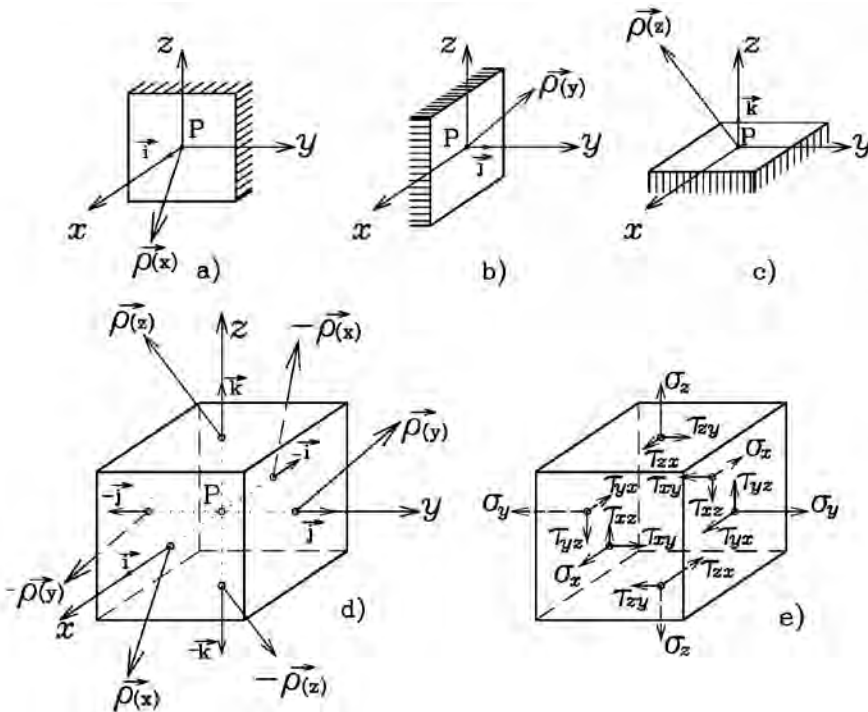
¹ Pretpostavka o homogenosti napona u okolini tačke nije opravdana u svim slučajevima i u svim tačkama, kao što je na primer bliska okolina napadnih tačaka koncentrisanih sila ili uopšte na mestima gde se javlja znatna koncentracija napona.

(τ_{nl} i τ_{nm}), prvi indeks označava normalu presečne ravni (n), a drugi indeks pravac u toj presečnoj ravni (l ili m) na koji je projektovan vektor napona $\vec{\rho}^{(n)}$.

1.2 STANJE NAPONA U TAČKI. TENZOR NAPONA

Pojam napona je vezan za tačku i presečnu ravan kroz tu tačku. Kako se kroz posmatranu tačku P može provući beskonačno mnogo presečnih ravni, to u tački P postoji beskonačno mnogo vektora napona $\vec{\rho}^{(n)}$. Skup svih vektora napona $\vec{\rho}^{(n)}$ za sve presečne ravni kroz tačku P naziva se *stanje napona* u tački P. Nadalje će biti pokazano da je *za određivanje napona $\vec{\rho}^{(n)}$ za bilo koju presečnu ravan, a time i za poznavanje stanja napona u tački, potrebno i dovoljno da se poznaju vektori napona za tri međusobno nekomplanarne ravni u toj tački.*

Pretpostavićemo da su u nekoj tački tela poznati vektori napona za tri međusobno upravne presečne ravni koje su normalne na koordinatne ose x , y i z , to su koordinatne ravni. Vektore napona za koordinatne ravni označićemo sa $\vec{\rho}^{(x)}$, $\vec{\rho}^{(y)}$ i $\vec{\rho}^{(z)}$ (sl.1.2.a-c).



Slika 1.2