

Predgovor

Ova knjiga je namenjena prvenstveno slušaocima poslediplomske nastave Odsjeka za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Beogradu, a napisana je na osnovu dela predavanja iz Rečne hidraulike, koja autor drži na ovom fakultetu.

Imajući u vidu da se inženjerska praksa danas ne može zamisliti bez primene računara, a da su mnogi numerički postupci koji su nekada ekskluzivno primenjivani u naučnim i istraživačkim ustanovama, danas dostupni širem krugu korisnika, autor se nada da će ova knjiga zainteresovati i određeni broj inženjera praktičara. U tom cilju je težio da svede obim matematičkih izvodenja na najmanju meru, oslanjajući se na „inženjersko-intuitivan“ pristup, pre nego na strogi matematički dokaz.

U prikazivanju metoda numeričkog modeliranja ravanskih (prostorno dvodimenzionih) otvorenih tokova, polazi se od pretpostavke da je čitalac već upoznat sa principima proračuna linijskih (prostorno jednodimenzionih) tokova. Naime, na Građevinskom fakultetu u Beogradu se numeričkom modeliranju linijskih otvorenih tokova posvećuje znatan broj časova predavanja i vežbanja na predmetima Hidraulika i Regulacija reka, kao i na poslediplomskom kursu iz Računske hidraulike. Podrazumeva se takodje da čitalac ima određeno predznanje iz mehanike fluida, numeričke analize i matičnog računa. Da bi se studentima poslediplomske nastave olakšalo korišćenje strane literature, u tekstu su uz sve važne pojmove navedeni odgovarajući termini na stranom (pretežno engleskom) jeziku.

Izlaganje materije počinje izvođenjem osnovnih jednačina ravanskog strujanja u takozvanim „plitkim oblastima“, a zatim se prikazuju metode modeliranja pojedinih članova u ovim jednačinama, naročito onih koji se odnose na uticaje tangencijalnih napona i turbulencije.

Osnovni pojmovi iz oblasti teorije graničnog sloja i otpora trenja su izloženi u nešto širem obimu, obzirom na značaj koji ova materija ima i u drugim oblastima rečne hidraulike. Modeli turbulencije su prikazani u skraćenom obimu, sa težištom na praktičnoj primeni.

Od numeričkih metoda za rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju ravanske tokove, obuhvaćene su Metoda karakteristika, Metoda konačnih razlika, Metoda konačnih elemenata i Metoda graničnih elemenata. Posebno su razmotrene računске sheme konačnih razlika prilagodjene etapnom rešavanju i sheme koje daju slaba rešenja za talase sa strmim čelom.

Treba istaći da je kao posledica burnog razvoja numeričkih metoda i računarske tehnologije (pojaviła se nova naučna disciplina „Hidroinformatika“), izbor računskih shema postao veoma širok. Nužno se nametnula potreba sužavanja ovog izbora na one računске postupke koji su se potvrdili u praksi, ili koji mogu pomoći u formiranju kritičke svesti inženjera-korisnika o tome sa kakvim ograničenjima se mora računati prilikom numeričke simulacije otvorenih tokova i šta se može očekivati od „gotovih softverskih alata“ (k njih je na tržištu sve više). S druge strane, izbor računskih postupaka koji su opisani u ovoj knjizi, usklađen je sa autorovom željom da prikaže i neke sopstvene rezultate do kojih je došao višegodišnjim radom u ovoj oblasti.

Zahvalan sam recenzentima, profesorima Dragutinu Muškatiroviću, Božidaru Batiniću i Marku Ivetiću, kao i kolegama Slobodanu Djordjeviću, Dubravki Pokrajac, Ranku Laziću i Radomiru Kaporu, na pažljivoj analizi teksta i korisnim sugestijama.

Beograd, maj, 1998.

Autor

Sadržaj

Predgovor
Spisak oznaka

1	Jednačine ravnanskog toka	1
1.1	Uvod	1
1.2	Navier-Stokes-ove jednačine	2
1.3	Reynolds-ove jednačine	5
1.4	Jednačine osrednjene po dubini	8
1.4.1	Jednačina kontinuiteta	11
1.4.2	Dinamičke jednačine	12
1.4.3	Transportna jednačina	15
1.5	Zatvaranje sistema jednačina	16
1.6	Modeliranje disperzionih članova	18
2	Modeliranje tangencijalnih napona	21
2.1	Uvod	21
2.2	Raspored tangencijalnog napona u graničnom sloju	21
2.3	Raspored brzine u graničnom sloju	24
2.3.1	Viskozni podsloj	26
2.3.2	Prelazni sloj	26
2.3.3	Turbulentni logaritamski sloj	26
2.3.4	Debljina viskoznog podsloja	30
2.3.5	Spoljašnji turbulentni sloj	32
2.3.6	Opšti zakon rasporeda brzine	34
2.4	Empirijski izrazi za otpore usled trenja	35
2.5	Tangencijalni naponi na dnu i na površini	39

3 Modeliranje turbulencije	41
3.1 Uvod	41
3.2 Turbulentna viskoznost i difuzija	44
3.3 Modeli turbulencije bez dopunskih jednačina	47
3.3.1 Model zasnovan na konstantnom koeficijentu turbulენტne viskoznosti	47
3.3.2 Model zasnovan na dužini mešanja	48
3.4 Model sa jednom transportnom jednačinom („ k -model”)	49
3.5 Model sa dve transportne jednačine („ k - ϵ model”)	51
3.6 Varijanta k - ϵ modela za otvorene tokove	53
3.7 Simulacija velikih vrtloga (LES)	56
4 Metoda karakteristika	61
4.1 Uvod	61
4.2 Talasna kretanja. Opšti pojmovi	62
4.3 Osnovne jednačine	64
4.4 Rešenje linijskog problema	65
4.5 Rešenje ravanskog problema	70
4.5.1 Karakteristične površi i bikarakteristike	70
4.5.2 Numeričke sheme	75
4.5.3 Numerička stabilnost	78
4.5.4 Primer primene metode	78
5 Metoda konačnih razlika	81
5.1 Uvod	81
5.2 Aproksimacija konačnim razlikama	81
5.3 Konzistencija, stabilnost, konvergencija	88
5.4 Računske mreže	90
5.5 Principi numeričkog rešavanja	92
5.5.1 Difuzija	93
5.5.1.1 Diskretizacija	93
5.5.1.2 Difuzioni koeficijenti i izvorni član	98
5.5.1.3 Granični uslovi	99
5.5.1.4 Numerička stabilnost	101
5.5.1.5 Računski algoritam. Metoda sukcesivnih nadrelaksacija	102
5.5.1.6 Razdvajanje po koordinatnim pravcima	105

	5.5.1.7	Thomas-ov TDMA algoritam	107
5.5.2		Konvekcija i difuzija	110
	5.5.2.1	Sheme uzvodnih razlika	111
	5.5.2.2	Hibridna shema	113
5.6		Rešavanje jednačina ravanskog toka	116
5.7		Etapno rešavanje	120
	5.7.1	Računski algoritam	122
	5.7.1.1	Etapa I - konvekcija:	123
	5.7.1.2	Etapa II: difuzija:	126
	5.7.1.3	Etapa III: kontinuitet:	127
	5.7.1.4	Početni i granični uslovi	128
	5.7.2	Krivolinijske koordinate	129
	5.7.3	Primer primene metode	135
5.8		Modeliranje talasa sa strmim čelom	137
	5.8.1	Naglo promenljivi neustaljeni tokovi	139
	5.8.2	Jednačine čela talasa	143
	5.8.3	Metode rešavanja sa posebnim jednačinama za čelo talasa	146
	5.8.4	Metode rešavanja bez posebnih jednačina za čelo talasa	147
	5.8.4.1	Slaba rešenja	147
	5.8.4.2	Pseudoviskoznost	151
	5.8.5	Vektorska formulacija osnovnih jednačina	152
	5.8.6	Računska shema MacCormack	154
	5.8.6.1	Formulacija u vektorskom obliku	154
	5.8.6.2	Formulacija u skalarnom obliku	156
	5.8.6.3	Početni i granični uslovi	158
	5.8.6.4	Model turbulencije	160
	5.8.6.5	Stabilnost i konzervativnost sheme	162
	5.8.6.6	Veštačka viskoznost	165
	5.8.6.7	Primeri primene metode	166
	5.8.7	Razdvajanje matrica fluksa	174
	5.8.7.1	Osnovni pojmovi	174
	5.8.7.2	Matrične transformacije	178
	5.8.8	Eksplcitna Gabutti-jeva shema	182
	5.8.8.1	Formulacija u vektorskom obliku	183
	5.8.8.2	Formulacija u skalarnom obliku	185

5.8.8.3	Stabilnost sheme	188
5.8.9	Implicitna shema Beam i Warming	189
5.8.9.1	Opšta formulacija	190
5.8.9.2	Rešavanje faktorizacijom	193
5.8.9.3	Granični uslovi	196
5.8.9.4	Stabilnost sheme	197
5.8.9.5	Primer primene metode	198
6	Metoda konačnih elemenata	205
6.1	Uvod	205
6.2	Opšti pojmovi	206
6.3	Aproksimacija rešenja	208
6.4	Oblici i svojstva konačnih elemenata	217
6.5	Konzistencija i kontinuitet rešenja	219
6.6	Referentni elementi	220
6.6.1	Aproksimacija rešenja po referentnom elementu	225
6.6.2	Opšti postupak formiranja interpolacionih funkcija	226
6.6.3	Transformacija izvoda i integrala	232
6.7	Osnovni elementi Lagrange-ovog tipa	235
6.7.1	Linijski elementi	236
6.7.1.1	Linearni element (2 čvora, C^0)	236
6.7.1.2	Kvadratni element (3 čvora, C^0)	238
6.7.1.3	Opšti element	238
6.7.2	Ravanski trougaoni elementi	239
6.7.2.1	Linearni trougaoni element (3 čvora, C^0)	240
6.7.2.2	Kvadratni trougaoni element (6 čvorova, C^0)	242
6.7.2.3	Opšti trougaoni element	243
6.7.2.4	Krivolinijski trougaoni elementi	244
6.7.3	Ravanski četvorougaooni elementi	245
6.7.3.1	Bilinearni element (4 čvora, C^0)	245
6.7.3.2	Kvadratni element sa 9 čvorova (C^0)	246
6.7.3.3	Kvadratni element sa 8 čvorova (C^0)	247
6.7.3.4	Krivolinijski četvorougaooni elementi	250
6.8	Elementi Hermite-ovog tipa	250
6.9	Specijalni elementi	251
6.10	Integralne formulacije kao osnova MKE	252

6.10.1	Kontinualni i diskretni sistemi	252
6.10.2	Metode formiranja integralnih jednačina	254
6.10.3	Metode reziduuma	255
6.10.3.1	Pojam reziduuma	256
6.10.3.2	Opšta integralna formulacija	257
6.10.3.3	Slaba integralna formulacija	259
6.10.3.4	Metoda kolokacije	262
6.10.3.5	Metoda podoblasti	263
6.10.3.6	Metoda najmanjih kvadrata	264
6.10.3.7	Metoda Galerkin-a	265
6.10.4	Varijacione metode	267
6.11	Matrična formulacija MKE	270
6.12	Integralna jednačina za referentni element	276
6.13	Jedan primer	279
6.14	Numerička integracija. Gauss-ova metoda	285
6.14.1	Linijski problemi	286
6.14.2	Ravanski problemi	289
6.14.2.1	Kvadratni referentni element	289
6.14.2.2	Trougaoni referentni element	291
6.14.3	Broj integracionih tačaka i tačnost numeričke integracije	292
6.15	Algoritamska struktura MKE	293
6.16	Formiranje globalnih matrica	295
6.17	Uvodjenje graničnih uslova	299
6.18	Numeričko rešavanje nelinearnih problema	301
6.18.1	Ustaljeni nelinearni problem	302
6.18.2	Neustaljeni nelinearni problem	306
6.19	Primena MKE u analizi ravanskih tokova	314
6.19.0.1	Integralna formulacija problema	317
6.19.0.2	Uprošćena formulacija problema	319
6.19.0.3	Diskretizacione jednačine	321
6.19.0.4	Struktura elementarnih i globalnih matrica	325
6.19.0.5	Integracija po vremenu	326
6.19.0.6	Granični uslovi	327
6.19.0.7	Primeri primene metode	327

7	Metoda graničnih elemenata	337
7.1	Uvod	337
7.2	Teorijske osnove MGE	338
7.3	Rešavanje integralnih jednačina	344
7.3.1	Linijski linearni elementi	345
7.3.2	Linijski elementi višeg reda	350
7.3.3	Numeričke integracija	353
7.3.4	Rešenje unutar računске oblasti	354
7.4	Primena MGE u analizi ravanskih tokova	356
7.5	Primeri primene metode	359
A	Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednačina	363
B	Von Neumann-ova analiza numeričke stabilnosti	369
B.1	Amplifikaciona i fazna greška	369
B.2	Model jednačine linijskih problema	374
B.2.1	Talasna jednačina	374
B.2.2	Difuziona jednačina	380
B.3	Višedimenzioni problemi	382

Registar