Ј. ЂОРЂЕВИЋ, З. РАДИВОЈЕВИЋ,
Д. ДРАШКОВИЋ, Ж. СТАНИСАВЉЕВИЋ,
М. ПУНТ, К. МИЛЕНКОВИЋ

ОСНОВИ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ

ПРЕКИДАЧКЕ МРЕЖЕ

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Београд 2016.

Јован Ђорђевић, Захарије Радивојевић, Дражен Драшковић,
Жарко Станисављевић, Марија Пунт, Катарина Миленковић

ОСНОВИ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ

ПРЕКИДАЧКЕ МРЕЖЕ

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Рецензенти

Мило Томашевић

Милош Цветановић

Издаје и штампа
Академска мисао, Београд

Тираж 300 примерака

ИСБН 978-86-7466-587-9

ПРЕДГОВОР

Збирка решених задатака покрива део градива које се изучава у оквиру предмета Основи рачунарске технике на Електротехничком факултету, Универзитета у Београду, а односи се на прекидачке мреже.

Задаци из главе 1 покривају представљање и минимизацију потпуно и непотпуно дефинисаних прекидачких функција. У задацима се за представљање прекидачких функција користе комбинационе таблице, скупови индекса, Булови изрази и кубови, док се за минимизацију користе Карноове карте. У оквиру представљања прекидачких функција се приказује како се прекидачке функције представљене на један од могућих начина представљања могу представити на неки од преосталих начина представљања и како се за две прекидачке функције утврђује да ли се ради о једнаком или неједнаким прекидачким функцијама. У оквиру минимизацију прекидачких функција се приказује како се за прекидачке функције представљене на један од могућих начина представљања одређује Булов израз у облику минималне дисјунктивне или конјуктивне нормалне форме.

Задаци из главе 2 покривају анализу и синтезу комбинационих прекидачких мрежа. У задацима се комбинационе прекидачке мреже представљају структурним шемама и законима функцонисања. У оквиру анализе се приказује како се на основу структурне шеме долази до закона функционисања, док се у оквиру синтезе приказује како се на основу закона функционисања долази до структурне шеме. Структурне шеме се реализују логичким елементима НЕ, И и ИЛИ, НИ и НИЛИ са произвољним бројем улаза и са два улаза. Закон функционисања се у оквиру анализе даје функцијама излаза, док се у оквиру синтезе даје формално Буловим изразима и скуповима индекса и описно пресликавањем улазних сигнала на излазне сигнале.

Задаци из главе 3 покривају анализу и синтезу секвенцијалних прекидачких мрежа. У задацима се секвенцијалне прекидачке мреже представљају структурним шемама и законима функцонисања. У оквиру анализе се приказује како се на основу структурне шеме долази до закона функционисања, док се у оквиру синтезе приказује како се на основу закона функционисања долази до структурне шеме. Структурне шеме су Милијевог и Муровог типа и реализују се флип-флоповима D, T, RS и JK типа и логичким елементима НЕ, И и ИЛИ. Закон функционисања се у оквиру анализе даје функцијама излаза и прелаза, таблицама прелаза/излаза и графовима прелаза/излаза, док се у оквиру синтезе даје формално графом прелаза/излаза и описно променама стања и секвенцама нула и јединица које треба препознати. Поступак синтезе се користи и да се прикаже како се долази до структурних шема флип-флопова и то тактованих D, T, RS и JK флип-флопова са једноставним структурним шемама користећи асинхроне RS флип-флопове реализоване са НИ и НИЛИ елементима, тактованих D, T, RS и JK флип-флопова са сложеним структурним шемама *master-slave* типа и тактованих D, T, RS и JK флип-флопова користећи тактоване D, T, RS и JK флип-флопове.

Задаци из главе 4 покривају стандардне комбинационе модуле декодере, кодере, мултиплексере, демултиплексере, помераче, инкрементере, декрементере, сабираче, одузимаче, аритметичке јединице, логичке јединице и компараторе. Задаци у овој глави покривају анализу комбинационих прекидачких мрежа којом се на основу задатке структурне шеме у којој се појављују стандардни комбинациони модули и логички елементи долази до закона функционисања датог функцијама излаза.

Задаци из главе 5 покривају стандардне секвенцијалне модуле регистре, бројаче и меморије са равноправним приступом. У задацима се приказује како се реализују регистри са операцијама паралелног уписа, серијског уписа померањем удесно и улево, инкрементирања и декрементирања по модулу 2^n и брисања коришћењем D, T, RS и JK флип-флопова и како се коришћењем меморијских модула одређене ширине меморијске речи и капацитета реализују меморије веће ширине меморијске речи и већег капацитета.

Иако су задаци више пута проверавани, аутори су свесни да је могуће да су се неке грешке поткрале и свима онима који на њих буду указивали аутори дугују захвалност.

Аутори

Београд
јануара 2016.

САДРЖАЈ

1. ПРЕКИДАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Задаци у овом глави покривају представљање прекидачких функција и минимизацију прекидачких функција.

1.1. ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРЕКИДАЧКИХ ФУНКЦИЈА

Задаци у овом одељку покривају представљање прекидачких функција.

1.1.1 F(1) у СДНФ и СКНФ

Потпуно дефинисану прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату са

$f(1) = \{1, 5, 6, 7\}$,

при чему је f(1) скуп индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност један, представити Буловим (*Bool*) изразом у облику СДНФ и СКНФ.

Решење:

Да би се одредила СДНФ неке прекидачке функције потребно је утврдити на којим векторима улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 та прекидачка функција има вредност један, затим за те векторе треба написати потпуне производе и на крају те написане потпуне производе треба повезати знаком дисјункције.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност један на векторима са индексима

1 = 001, 5 = 101, 6 = 110 и 7 = 111.

Вектору $a_1a_2 \dots a_n$ одговара потпуни производ $p = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_n$ у којем се променљива x_i појављује са негацијом ако је координата $a_i = 0$ и промељива x_i појављује без негације ако је координата $a_i = 1$, па векторима на којима функција има вредност 1 одговарају потпуни производи

$P_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$, $P_5 = x_1\bar{x}_2x_3$, $P_6 = x_1x_2\bar{x}_3$ и $P_7 = x_1x_2x_3$

СДНФ задате прекидачке функције је

$f(x_1, x_2, x_3) = P_1 + P_5 + P_6 + P_7$, па је

$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$

Да би се одредила СКНФ неке прекидачке функције потребно је утврдити на којим векторима улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 та прекидачка функција има вредност нула, затим за те векторе треба написати потпуне суме и на крају те написане потпуне суме треба повезати знаком конјункције.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ је потпуно дефинисана прекидачка функција за коју важи да је $f(1) \cup f(0) = \{0,1\}^3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, при чему је f(0) скуп индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност нула, па је

$f(0) = \{0, 2, 3, 4\}$.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност нула на векторима са индексима

0 = 000, 2 = 010, 3 = 011 и 4 = 100.

Вектору $a_1a_2 \dots a_n$ одговара потпуна сума $s = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n$ у којој се променљива x_i појављује са негацијом ако је координата $a_i = 1$ и промељива x_i појављује без негације ако је координата $a_i = 0$, па векторима на којима функција има вредност нула одговарају потпуне суме

$S_0 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$, $S_3 = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$ и $S_4 = \bar{x}_1 + x_2 + x_3$

СКНФ задате функције је

$f(x_1, x_2, x_3) = S_0 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$, па је

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3)$$

1.1.2 F(0) у СКНФ и СДНФ

Потпуно дефинисану прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату са

$f(0) = \{1, 3, 6\}$,

при чему је f(0) скуп индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност нула, представити Буловим изразом у облику СКНФ и СДНФ.

Решење:

Да би се одредила СКНФ неке прекидачке функције потребно је утврдити на којим векторима улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 та прекидачка функција има вредност нула, затим за те векторе треба написати потпуне суме и на крају те написане потпуне суме треба повезати знаком конјункције.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност нула на векторима са индексима

1 = 001, 3 = 011 и 6 = 110.

Потпуне суме које одговарају овим векторима су

$S_1 = x_1 + x_2 + \overline{x}_3$, $S_3 = x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ и $S_6 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3$

СКНФ задате функције је

$f(x_1, x_2, x_3) = S_1 \cdot S_3 \cdot S_6$, па је

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$$

Да би се одредила СДНФ неке прекидачке функције потребно је утврдити на којим векторима улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 та прекидачка функција има вредност један, затим за те векторе треба написати потпуне производе и на крају те написане потпуне производе треба повезати знаком дисјункције.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ је потпуно дефинисана прекидачке функција за коју важи да је $f(1) \cup f(0) = \{0,1\}^3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, при чему је f(1) скуп индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност један, па је

$f(1) = \{0, 2, 4, 5, 7\}$.

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност 1 на векторима са индексима

0 = 000, 2 = 010, 4 = 100, 5 = 101 и 7 = 111.

Потпуни производи који одговарају овим векторима су

$P_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $P_2 = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$, $P_4 = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $P_5 = x_1\overline{x}_2 x_3$ и $P_7 = x_1 x_2 x_3$

СДНФ задате функције је

$f(x_1, x_2, x_3) = P_0 + P_2 + P_4 + P_5 + P_7$, па је

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 .$$

1.1.3 ДНФ у СДНФ

Прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату Буловим изразом у облику ДНФ

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

представити Буловим изразом у облику СДНФ.

Решење:

Прекидачка функција је дата у облику ДНФ, јер се у изразу за прекидачку функцију појављују елементарни производи. Пошто се свака прекидачка функција, осим константе 0, може представити у облику СДНФ, трансформисањем ДНФ се може добити СДНФ. Трансформисање ДНФ у СДНФ се заснива на развијању свих елементарних производа у задатој ДНФ по свим променљивима које се не појављују у елементарним производима. Као резултат развијања елементарних производа добија се сума потпуних производа у којој неки потпуни производи могу да се јаве више пута, па за такве попуне производе треба задржати само један од њих а остале елиминисати.

Нека је у задатој ДНФ $p = \tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}\ldots\tilde{x}_{j_k}$ један од елементарних производа у којем се од n променљивих појављује k променљивих. Број променљивих r=n–k које се не појављују у елементарном производу представља ранг елементарног производа. Уколико је x_i једна од променљивих која се не појављује у елементарном производу p може се применити следећа трансформација

$$p = p \cdot 1 = p \cdot (x_i + \overline{x}_i) = px_i + p\overline{x}_i$$

Ова трансформација се назива развијање елементарног производа p по променљивој x_i. Развијање елементарног производа p је потребно поновити за сваку од променљивих које се не јављају у елементарном производу. Пошто се развијање елементарног производа p понови r пута, добија се сума од 2^r потпуних производа. У сваком потпуном производу се појављује елементарни производ p и један од 2^r потпуних производа формираних од r променљивих које се не појављују у елементарном производу p.

Описани поступак развијања елементарног производа је потребно применити на све елементарне производе у којима се неке од променљивих не појављују. При томе ће за оне векторе на којима више елементарних производа има вредност један бити онолико истих потпуних производа колико има елементарних производа који на њима имају вредност један, па је за такве векторе потребно задржати само један потпуни производ а остале елиминисати.

Овим поступком се добија да је

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 + \overline{x}_1)(x_3 + \overline{x}_3) + x_1x_3(x_2 + \overline{x}_2) + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 =$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

Потпуни производ $x_1x_2x_3$ се јавља два пута и то као резултат развијања елементарних производа x_2 и x_1x_3, па се само један од њих задржава док се други елиминише, чиме се добија СДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

1.1.4 КНФ у СКНФ

Прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату Буловим изразом у облику КНФ

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$

представити Буловим изразом у облику СКНФ.

Решење:

Прекидачка функција је дата у облику КНФ, јер се у изразу за прекидачку функцију појављују елементарне суме. Пошто се свака прекидачка функција, осим константе 1, може представити у облику СКНФ, трансформисањем КНФ се може добити СКНФ. Трансформисање КНФ у СКНФ се заснива на развијању свих елементарних сума у задатој КНФ по свим променљивима које се не појављују у елементарним сумама. Као резултат развијања елементарних сума добија се производ потпуних сума у којем неке потпуне суме могу да се јаве више пута, па за такве попуне суме треба задржати само једну од њих а остале елиминисати.

Нека је у задатој КНФ $s = \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + \ldots + \tilde{x}_{j_k}$ једна од елементарних сума у којој се од n променљивих појављује k променљивих. Број променљивих $r=n-k$ које се не појављују у елементарном суми представља ранг елементарне суме. Уколико је x_i једна од променљивих која се не појављује у елементарном суми s може се применити следећа трансформација

$$s = s + 0 = s + x_i\overline{x}_i = (s + x_i)(s + \overline{x}_i)$$

Ова трансформација се назива развијање елементарне суме s по променљивој x_i. Развијање елементарне суме s је потребно поновити за сваку од променљивих које се не јављају у елементарној суми. Пошто се развијање елементарне суме s понови r пута, добија се производ од 2^r потпуних сума. У свакој потпуној суми се појављује елементарна сума s и једна од 2^r потпуних сума формираних од r променљивих које се не појављују у елементарној суми s.

Описани поступак развијања елементарне суме је потребно применити на све елементарне суме у којима се неке од променљивих не појављују. При томе ће за оне векторе на којима више елементарних сума има вредност нула бити онолико истих потпуних сума колико има елементарних сума које на њима имају вредност нула, па је за такве векторе потребно задржати само једну потпуну суму а остале елиминисати.

Овим поступком се добија да је

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3)(x_2 + x_3 + x_1\overline{x}_1)(x_1 + x_2 + x_3) =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x}_1 + x_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

Потпуна сума $x_1 + x_2 + x_3$ се јавља два пута и то као резултат развијања елементарних сума x_1 и $x_2 + x_3$, па се само једна од њих задржава док се друга елиминише, чиме се добија СКНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + x_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

1.1.5 СДНФ у F(1) и F(0)

Прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату Буловим изразом у облику СДНФ

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

представити у облику f(1) и f(0) који представљају скупове индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност један и нула, респективно.

Решење:

Прекидачка функција је дата у облику СДНФ, јер се у изразу за прекидачку функцију појављују потпуни производи. Сваки потпуни производ у СДНФ има вредност један на једном од вектора улазних сигнала x_1, x_2 и x_3. Стога је потребно утврдити индексе вектора улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 за које се у СДНФ појављују потпуни производи и формирати њихов скуп f(1).

У изразу за прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ су следећи потпуни производи:

$x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2x_3$, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1x_2x_3$ и $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

Потпуном производу $p = \tilde{x}_1\tilde{x}_2...\tilde{x}_n$ одговара вектор $a_1a_2 ... a_n$, у којем је $a_i = 0$, ако се променљива x_i појављује у p са негацијом, и $a_i = 1$, ако се променљива x_i појављује у p без негације. На основу овога се добија да потпуним производима $x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2x_3$, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1x_2x_3$ и $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ одговарају вектори 111, 110, 101, 100, 011 и 000, респективно. Стога је тражени скуп индекса који одговарају векторима на којима функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност један

f(1) = {0, 3, 4, 5, 6, 7}

Функција $f(x_1, x_2, x_3)$ је потпуно дефинисана прекидачке функција за коју важи да је $f(1) \cup f(0) = \{0,1\}^3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, па је тражени скуп индекса који одговарају векторима на којима функција $f(x_1, x_2, x_3)$ има вредност нула

f(0) = {1, 2}.

Дискусија: Скуп f(1) који представља скуп вектора на којима прекидачка функција има вредност један, се назива и „дисјунктивни покривач“ или „1 покривач“. Скуп f(0) који представља скуп вектора на којима прекидачка функција има вредност нула, се назива и „конјуктивни покривач“ или „0 покривач“.

1.1.6 СКНФ у F(0) и F(1)

Прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$ задату Буловим изразом у облику СКНФ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4)(\overline{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4)(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4)$$

представити у облику f(0) и f(1) који представљају скупове индекса који одговарају векторима на којима функција има вредност нула и један, респективно.

Решење:

Прекидачка функција је дата у облику СКНФ, јер се у изразу за прекидачку функцију појављују потпуне суме. Свака потпуна сума у СКНФ има вредност нула на једном од вектора улазних сигнала x_1, x_2 и x_3. Стога је потребно утврдити индексе вектора улазних сигнала x_1, x_2 и x_3 за које се у СКНФ појављују потпуне суме и формирати њихов скуп f(0).

У изразу за прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ су следеће потпуне суме:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$, $\overline{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$.

Потпуној суми $s = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + ... + \tilde{x}_n$, одговара вектор $a_1a_2 \ldots a_n$, у којем је $a_i = 1$, ако се промењљива x_i појављује у s са негацијом, и $a_i = 0$, ако се промењљива x_i појављује у s без негације. На основу овога се добија да потпуним сумама $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$, $\overline{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$ одговарају вектори 0000, 0010, 1000, 1010, респективно. Стога је тражени скуп индекса који одговарају векторима на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула

f(0) = {0, 2, 8, 10}

Функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ је потпуно дефинисана прекидачке функција за коју важи да је $f(1) \cup f(0) = \{0,1\}^4$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, па је тражени скуп индекса који одговарају векторима на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један

f(1) = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15}.