Александра Љ. Ерић • Владимир Д. Половина

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2

за студенте Грађевинског факултета

УВОД У ТЕОРИЈУ И РЕШЕНИ ЗАДАЦИ

АКАДЕМСКА МИСАО
Београд, 2018.

Александра Љ. Ерић
Владимир Д. Половина

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2
УВОД У ТЕОРИЈУ И РЕШЕНИ ЗАДАЦИ
за студенте Грађевинског факултета

Рецензенти
Др Владимир Грујић
Др Бојана Михаиловић

Издавач
АКАДЕМСКА МИСАО
Бул. краља Александра 73, Београд

Главни и одговорни уредник
Марко Вујадиновић

Технички уредник
Жељко Хрчек

Тираж
300 примерака

Штампа
Академска мисао, Београд

ИСБН: 978-86-7466-729-3

[illegible]
Драгош Калајић - "Хиперборејка"

Садржај

Предговор

Поштовани читаоче,

Пред Вама се налази књига која је пре свега намењена студентима Грађевинског факултета Универзитета у Београду, који полажу курс Математичка анализа 2. Она је писана према програму овог предмета и бави се темама које су тим програмом прописане. Наша намера била је да она у првом реду одговори на потребе студената, а не да се бави самопрезентацијом аутора.

С тим у вези, књига покрива четири области: функционални редови, функције више промењљивих, вишеструки интеграли, као и диференцијалне једначине. Ове области покривене су у оној мери која је неопходна за полагање овог курса и прате исту логику излагања са предавања и вежби. С тим у вези желимо да се захвалимо нашем колеги Матеји Кнежевићу који је својим радом значајно утицао на дефинисање и утемељење изгледа курса Математичке анализе 2. Дубоко задивљени и инспирисани радом нашег колеге Ивана Лазаревића, који са невероватном лакоћом проналази начине да студентима приближи и упрости градиво, трудили смо се да и ми уважимо такав приступ и на концу покушамо да применимо у књизи. Захваљујемо се колеги Марку Пешовићу који је својим корисним саветима помогао техничку израду књиге.

За коначно уобличење визије аутора, такође су заслужни и рецензенти Бојана Михаиловић, чији утицај на ауторе није био само кроз корисне савете већ и кроз дугогодишну сарадњу, те Владимир Грујић, и то не само као рецензент већ и као пријатељ и саговорник са којим се у много чему тражио пут и који је знао да ослушне дилеме аутора и на њих одговори на прави начин. Посебну захвалност упућујемо Соњи Калајић, ћерки Драгоша Калајића, која нам је омогућила да се на корицама књиге нађе слика њеног оца, Хиперборејка, чиме су аутори желели да скрену пажњу будућих генерација на непролазно дело овог нашег великог уметника и мислиоца.

У контекст антихеројског духа модерне културе улази и њена страст раскринкавања хероја прошлости. Она их приказује као кукавице, психопате или пуке фикције. Тиме се показује и потпуно неразумевање фигуре хероја и њеног значаја: за виталне интересе заједнице није важно ко је херој или шта је он, одакле долази, какве га побуде воде: важно је како он функционише: важан је учинак. И у том погледу стварност потврђује начело да циљ оправдава средство.

Драгош Калајић, Смак света

1

Функционални редови

1.1 Теорија

Дефиниција 1. Низ функција $\{f_n(x)\}$, $f_n : E \to R$, $n \in N$, просто, односно тачка по тачка, конвергира ка функцији $f : E \to R$, ако за свако фиксирано $x_0 \in E$, бројни низ $\{f_n(x)\}$ конвергира ка броју $f(x_0)$, а за скуп E кажемо да је интервал конвергенције. Ознака за просту, тачка по тачка, конвергенцију је $f_n(x) \to f(x)$, $x \in E$.

Дефиниција 2. Низ функција $\{f_n(x)\}$, $f_n : E \to R$, $n \in N$, равномерно, односно униформно, конвергира ка функцији $f : E \to R$ на скупу E ако важи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0 \wedge \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$. Ознака за равномерну, униформну, конвергенцију је $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$.

Дефиниција 3. Функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

где $f_n : E \to R$, $E \subseteq R$, просто, односно тачка по тачка, конвергира својој суми $S(x)$, ако низ парцијалних сума $S_n(x)$ просто конвергира ка $S(x)$. (Простије речено: Функционални ред конвергира у тачки $x_0 \in E$, ако бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвергира.)

Дефиниција 4. Функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

где $f_n : E \to R$, $E \subseteq R$, равномерно конвергира својој суми $S(x)$, ако низ парцијалних сума $S_n(x)$ равномерно конвергира на E ка $S(x)$.

Дефиниција 5. Функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

где $f_n : E \to R$, $E \subseteq R$, апсолутно конвергира ако ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| + \cdots,$$

просто конвергира.

(Простије речено: Функционални ред апсолутно конвергира на интервалу D, ако за свако $x_0 \in D$ важи да бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ конвергира.)

Пример 1. *Кошијев критеријум*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(1+x^2)^n}} = \frac{n}{1+x^2} = \infty$$

За $\forall x \in R$. Интервал конвергенције $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2. *Даламберов критеријум*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} e^x = e^x$$

- када је $l = e^x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ ред конвергира
- када је $x \geq 0$ ред дивергира.

1.1.1 Критеријуми равномерне конвергенције функционалних редова

Вајерштрасов став: Ако је дат функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots, \quad f_n : E \to R, E \subseteq R,$$

и за свако $f_n(x)$ постоји $f_n \in R$, тако да важи $f_n(x) < f_n$, $\forall x \in E$, и ако бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ конвергира онда функционални ред равномерно конвергира за $x \in E$.

Доказ. Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, а парцијалне суме функционалног реда означимо са $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, а са $s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ парцијалне суме бројног реда. А доказ теореме директно следи из чињенице да важи

$$\sup_{x\in E}|S(x)-S_n(x)| < \sup_{x\in E}\Big(|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots\Big)$$
$$= \sup_{x\in E}|f_{n+1}(x)| + \sup_{x\in E}|f_{n+2}(x)| + \cdots < f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots = s - s_n.$$

Пример 3. Испитати равномерну конвергенцију и интервал конвергенције функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Уочимо да важи

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in R,$$

а како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, то закључујемо да и функционални ред конвергира за $x \in R$.

Дирихлеов критеријум: Ако је низ парцијалних сума $\{S_n(x)\}$, функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \quad f_n : E \to R, \quad E \subseteq R,$$

равномерно ограничен на E, тј. $\exists M > 0$ тако да $\forall x \in E$ и $\forall n \in N$ задовољена неједнакост $|S_n(x)| \le M$, а функционални низ $\{b_n(x)\}$ задовољава следећа два услова:

d(1) $\forall x \in E$ важи $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$ за свако n, почев од неког n_0

d(2) $b_n(x) \rightrightarrows 0$, na E

онда важи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) b_n(x)$ конвергира равномерно на E.

Абелов критеријум: Ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, $f_n : E \to R$, $E \subseteq R$, равномерно конвергира на E, а функције $b_n(x)$ задовољавају два услова:

a(1) $\exists M > 0$ тако да $\forall x \in E$ и $\forall n \in N$ задовољена неједнакост $|b_n(x)| \le M$

a(2) $\forall x_0 \in E$ низ $\{b_k(x_0)\}$ је монотон почев од неког n_0, онда важи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)b_n(x)$ конвергира равномерно на E.

Особине равномерно конвергентних функционалних редова

Теорема 1. Ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ и функција $g(x)$ је ограничена на сегменту $[a,b]$, онда функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g(x)$$

равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$.

Доказ. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$ и $|g(x)| \le M, \forall x \in [a,b]$ онда важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

и

$$|S(x)g(x) - S_n(x)g(x)| = |g(x)||S(x) - S_n(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Теорема 2. Функције $f_n(x)$ су непрекидне на $[a,b]$, и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ онда је $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ такође непрекидна функција на сегменту $[a,b]$.

Доказ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

па такође за неко $h > 0$ важи

$$|S(x+h) - S_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Због непрекидности функција $f_n(x)$ имамо да је и парцијална сума S_{n_0} непрекидна функција као коначан збир непрекидних функција, па важи

$$|S_{n_0}(x+h) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тада важи

$$|S(x+h)-S(x)| = |S(x+h)-S_{n_0}(x+h)+S_{n_0}(x+h)-S_{n_0}(x)+S_{n_0}(x)-S(x)| <$$
$$|S(x+h)-S_{n_0}(x+h)|+|S_{n_0}(x+h)-S_{n_0}(x)|+|S_{n_0}(x)-S(x)| =$$
$$\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots, S_n(x) = (1-x)\frac{1-x^n}{1-x} = 1-x^n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases} \qquad S(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

$S(x)$ није непрекидна функција на сегменту $[0,1]$, а функције $f_n(x)$ јесу, али ни ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$$

није равномерно конвергентан јер $|S(x)-S_n(x)| \le x^n < \varepsilon$ за $n > n_0$ где је $x^n < \varepsilon$, за $n > \log_x \varepsilon = \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ па имамо $n_0 = n_0(x)$.

Теорема 3. Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ и нека су $f_n(x)$ непрекидне функције на истом сегменту. Онда важи

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt, x, x_0 \in [a,b].$$

Доказ. Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ равномерно конврегира то за $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ постоји $n_0 \in N$ тако да за свако $n > n_0$ важи $|S(x)-S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

$$\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt - \int_{x_0}^{x} S_n(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x}(S(t)-S_n(t))dt\right| \le$$
$$\int_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon}{b-a}dt = \frac{\varepsilon}{b-a}|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Дакле имамо:

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} f_k(x).$$

Теорема 4. Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира и наке функције $f_n(x)$ имају непрекидне изводе, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$. Онда за свако $x \in [a,b]$ важи

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Доказ. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sigma(x)$, за неко $x, x_0 \in [a,b]$ важи

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\right) dt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = S(x) - S(x_0),$$

према Теореми 2 $\sigma(x)$ је непрекидна функција. $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = S(x) - S(x_0)$ ако сада диференцирамо леву и десну страну добијамо

$$\left(\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt\right) = S'(x)$$

тј. $\sigma(x) = S'(x)$ односно

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'.$$

1.2 Степени редови

1.2.1 Уопштено о степеним редовима

Степени редови су функционални редови облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

или редови облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

где је $a_i \in R$ и називају се коефицијенти реда.

Абелова теорема:

(1) Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за $x = x_1 \neq 0$ онда апсолутно конвергира за сваку вредности тако да важи $|x| < |x_1|$.

(2) Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дивергира за $x = x_2$ онда дивергира за свако x тако да $|x| > |x_2|$.

Доказ. (1) Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за $x = x_1$ онда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ конвергира па $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, па постоји $M > 0$ тако да важи $|a_n x_1^n| < M$ за свако n почев од неког n_0. Посматрајмо ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

где је $|x| < |x_1|$ и уочимо

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M q^n$$

где је $q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$. Red $\sum M q^n$ је геометријски и конвергира. По поредбеном критеријуму $\sum a_n x^n$ конвергира за $|x| < |x_1|$. Слично се доказује и за (2).

Теорема 5. Постоји јединствено $R > 0$ за сваки степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ тако да ред апсолутно конвергира за $|x| < R$ и дивергира за $|x| > R$.

Дефиниција 6. Интервал конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ је $(-R, R)$, а R називамо полупречник конвергенције.

Ред апсолутно конвергира на $(-R, R)$, док у крајевима интервала конвергенције може да конвергира или да дивергира. Исто важи и за степени ред облика $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, али тада интервал конвергенције изгледа $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Ако је

$$l = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|,$$

где је $0 < l < \infty$, онда је $R = \dfrac{1}{l}$. Ако посматрамо ред апсолутних вредности $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, према Даламберовом критеријуму конвергенције имамо

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| l, \quad l|x| < 1$$

ред конвергира. Тада имамо да је$|x| < \dfrac{1}{l} = R$, те закључујемо да је као последица Даламберовог критеријума конвергенције

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|,$$

слично можемо да закључимо да из Кошијевог критеријума конвергенције следи $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Пример 5. Одредити област конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x+2)^n.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{n2^n}}{\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Дакле, степени ред апсолутно конвергира за $|x+2| < 2$, док за $|x+2| > 2$ степени ред дивергира.

Ако је $x + 2 = 2$ тада функционални ред постаје бројевни ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

који не конвергира апсолутно, али конвергира условно по Лајбницовом критеријуму конвергенције, док ако је $x + 2 = -2$, ред се трансформише у бројевни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{n}$ који дивергира. Област конвергенције овог реда је $(-4, 0]$.

Пример 6. Одредити област конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}(x-2)^n.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = n = \infty$$

па област конвергенције овог степеног реда $(-\infty, +\infty)$.

Пример 7. Одредити област конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

па закључујемо да ред конвергира само за $x = 0$.

1.2.2 Особине степених редова

Теорема 6. Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ апсолутно и равномерно конвергира на сваком сегменту $[-a, a] \subset (-R, R), a > 0$.

Доказ. За неко $a, 0 < a < R$, како за свако $|x| \le a$, важи $|a_n x^n| \le |a_n a^n|$ и како по Вајерштрасовом критеријуму ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n a^n|$ конвергира то закључујемо да почетни ред конвергира апсолутно и равномерно на $[-a, a]$.

Теорема 7. Сума $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ је непрекидна на интервалу конвергенције $(-R, R)$.

Доказ. Нека је $x \in (-R, R)$, тада сигурно постоји неко $a < R$, тако да $x \in [-a, a]$. $a_n x^n$ су непрекидне функције, а ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно конвергира на $[-a, a]$, па је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрекидна функција.

Интеграљење степених редова

Теорема 8. Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може интегралити члан по члан на интервалу конвергенције $(-R, R)$ и полупречник конвергенције тако добијеног реда је исти као полупречник конвергенције почетног реда.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R).$$