Зоран Пуцановић
Марко Пешовић
Матеја Кнежевић
Иван Лазаревић

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1

Збирка решених задатака

АКАДЕМСКА МИСАО
Универзитет у Београду – Грађевински факултет
Београд, 2019.

Зоран Пуцановић, Марко Пешовић, Матеја Кнежевић, Иван Лазаревић

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1

Збирка решених задатака

Рецензенти:
Проф. др Бранко Малешевић,
редовни професор Електротехничког факултета у Београду
Проф. др Владимир Грујић
ванредни професор Математичког факултета у Београду

Издаје:
Академска мисао, Београд
Универзитет у Београду – Грађевински факултет

Штампа:
Академска мисао, Београд

Тираж: 300 примерака

ИСБН 978-86-7466-789-7

ПРЕДГОВОР

Уџбеник који се налази пред вама настао је из потребе да се помогне, пре свега студентима Грађевинског факултета у Београду да лакше савладају градиво предмета Математичка анализа 1, који се слуша на првој години основних академских студија. Током вишегодишњег рада са студентима, аутори су увидели да студенти теже прихватају неке фундаменталне појмове математичке анализе - пре свега појам граничног процеса, а затим и појмове бесконачно малих и великих величина. Из тог разлога, трудили смо да задатке изаберемо тако да покрију и истовремено објасне све стандардне појмове из ових области, док су решења задатака писана што детаљније, па можда понекад и са редудантним коментарима. У решењима смо се трудили да истакнемо кључне кораке и начин размишљања који би помогао студентима да сигурно дођу до тачног решења сличних или сродних затака.

Збирка је писана према важећем програму предмета Математичка анализа 1, а подељена је на пет поглавља, тако да редослед прати излагање градива на датом предмету. То су *Низови бројева*, *Бројни редови*, *Реалне функције*, *Неодређени* и *Одређени* интеграл и примене. На почетку сваког поглавља су наведене најважније дефиниције и теореме које би требало да буду од користи студентима при решавању задатака. Трудили смо се да поглавља буду самостална, тако да се могу обрађивати тематске јединице по потреби.

Унапред се захваљујемо читаоцима који нам укажу на грешке у овој збирци, ма којег карактера оне биле. Посебно се захваљујемо рецензентима на пажљивом читању и корисним сугестијама.

На крају, надамо се да ће ова збирка бити од користи и студентима других техничких и природно-математичких факултета, као и свима другима који имају вољу и жељу де се упознају за обрађеним темама у овом рукопису.

Београд, октобар 2019.

Аутори

Садржај:

Глава 1

Низови реалних бројева

1.1 Теоријски увод

Дефиниција 1.1. *Сваку функцију $x : \mathbb{N} \to A$, где је $A \subset \mathbb{R}$, називамо низом реалних бројева. Вредност $x(n)$ означавамо са x_n и називамо n-тим чланом низа, док сам низ означавамо са $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ или једноставно (x_n) уколико нема опасности од забуне.*

Један од основних појмова везаних за низове је појам граничне вредности низа. Дефинишемо га на следећи начин.

Дефиниција 1.2. *За тачку $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је гранична вредност или лимес низа реалних бројева (x_n), у ознаци $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ако важи*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Кажемо још да $x_n \to a$ кад $n \to \infty$. Ако је a коначан број кажемо да је низ конвергентан, а у случају да је $a = \pm\infty$ или да гранична вредност не постоји, кажемо да је низ одређено или неодређено дивергентан.

Протумачимо најпре претходну дефиницију, а затим и наведимо неколико примера ради појашњења уведених ознака.

Наиме, горња дефиниција нам заправо каже да низ x_n тежи ка a ако су му сви чланови, почевши од неког, довољно близу броја a. Стога, кад разматрамо конвергенцију низа реалних бројева, онда се произвољно велики, али коначан, број чланова низа може занемарити.

При томе уопште није битно да ли смо занемарили 10, 100 или 1000000 почетних чланова низа. Битно нам је само да се сви остали налазе произвољно близу броју a. Самим тим, када низ конвергира броју a, кажемо да се у свакој околини броја a налазе „*скоро сви чланови низа*" односно, „*сви чланови низа почевши од неког*".

Можемо приметити да у претходној дефиницији стоји $a \in \mathbb{R}$, а не $a \in \overline{\mathbb{R}}$[1], односно да је дефиниција дата за случај када је a коначан број. Стога, остаје нам још да је „преведемо" за случај $a = +\infty$ (аналогно се дефинише и случај $a = -\infty$), односно кад низ дивергира. Тада скоро сви чланови низа треба да буду довољно велики, односно већи од било ког реалног броја, па имамо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies x_n > M).$$

Теорема 1.1. *Конвергентан низ има само једну граничну вредност.*

Теорема 1.2. *Сваки конвергентан низ је ограничен.*

Дефиниција 1.3. *Ако је* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *кажемо да је* (x_n) нула низ.

Теорема 1.3. *Нека су* (x_n) *и* (y_n) *конвергентни низови и нека је* $\lim x_n = x$ *и* $\lim y_n = y$. *Тада важи:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y\,.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y\,.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, *ако је* $y_n \neq 0$ *за скоро све* n *и* $y \neq 0$.

Последица 1.1. *Производ ограниченог и нула низа је нула низ.*

Теорема 1.4. (О два полицајца) *Нека су* (x_n) *и* (z_n) *конвергентни низови и нека постоји* $k \in \mathbb{N}$, *такав да је*

$$x_n \leq y_n \leq z_n\,, \quad \text{за свако } n \geq k\,.$$

Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *онда је* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\,.$

[1] $\overline{\mathbb{R}}$ означава проширени скуп реалних бројева, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\,.$

Дефиниција 1.4. За низ (x_n) кажемо да је Кошијев ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon)\,.$$

Теорема 1.5. *Сваки Кошијев низ је ограничен.*

Теорема 1.6. *Реалан низ је конвергентан ако и само ако је Кошијев.*

Дефиниција 1.5. Низ (x_n) је *растући (строго растући)* ако важи $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ за скоро све $n \in \mathbb{N}$. Аналогно, (x_n) је *опадајући (строго опадајући)* ако важи $x_n \geq x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ за скоро све $n \in \mathbb{N}$. Низ (x_n) је (строго) монотон, ако је (строго) растући или (строго) опадајући.

Дефиниција 1.6. Низ (y_n) је подниз низа (x_n) ако постоји строго растући низ (k_n) природних бројева, такав да је $y_n = x_{k_n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.7. *Низ (x_n) има граничну вредност a (бесконачну или коначну) акко сваки његов подниз има граничну вредност a.*

Теорема 1.8. *Сваки ограничен низ има конвергентан подниз.*

Дефиниција 1.7. Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа реалних бројева (x_n) ако постоји подниз (x_{k_n}), такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$.

Дефиниција 1.8. Ако постоји, најмања тачка нагомилавања a_* низа (x_n) зове се доња граница или лимес инфериор низа (x_n), у ознаци

$$a_* = \liminf_{n\to\infty} x_n\,.$$

Аналогно, ако постоји највећа тачка нагомилавања низа (x_n), зовемо је горњом границом или лимес супериором низа (x_n), у ознаци,

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$[2]

Теорема 1.9. *Низ (x_n) конвергира ка $a \in \mathbb{R}$ ако и само ако важи*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

[2] За лимес инфериор (супериор) низа x_n користе се још и ознаке $\underline{\lim} x_n$, $\overline{\lim} x_n$.

На овом месту треба напоменути битну разлику између појма лимеса и појма тачке нагомилавања низа. Из дефиниције 1.1 наиме можемо закључити да гранична вредност низа има особину да се у његовој произвољној околини налазе скоро сви чланови низа (односно ван ње је само коначно много њих). Са друге стране у произвољној околини тачке нагомилавања налази се само бесконачно много чланова низа, па их и ван ње може бити бесконачно много. Јасно је да је лимес низа, ако постоји, увек и његова једина тачка нагомилавања.

Теорема 1.10. *Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан. Прецизније:*
Ако је (x_n) *растући, ограничен здесна, онда* $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Ако је (x_n) *опадајући, ограничен слева, онда* $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Став 1.1. *Сваки монотон низ има граничну вредност у* $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 1.11. (Штолцов став) *Нека је* $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ *и нека важи*

- *Низ* y_n *је монотоно растући и важи* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.
- *Постоји* $L' = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ *који је коначан или бесконачан.*

Тада постоји и L *и важи* $L = L'$.

Штолцов став је погодан за налажење граничних вредности облика

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}\,,\ \text{за } x_n > 0,$$

на следећи начин: $\ln L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.

Неке важније неједнакости

- Неједнакост троугла: $|x_1 + \cdots + x_n| \le |x_1| + \cdots + |x_n|\,,\ x_i \in \mathbb{R}$.
- Бернулијева неједнакост:
$$(1+x)^n \ge 1 + nx\,,\quad x > -1\,,\ x \ne 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ n > 1\,.$$
- Неједнакост геометријске и аритметичке средине ненегативних бројева $x_1, \ldots, x_n$:
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\,.$$