

Nenad Cakić
Vladimir Bečejac

MATEMATIKA 3
Zbirka rešenih zadataka

Funkcije više promenljivih
Višestruki integrali

2. izdanje

Akadska misao
Beograd, 2016.

Nenad Cakić, Vladimir Bečejac

MATEMATIKA 3
Zbirka rešenih zadataka
Funkcije više promenljivih
Višestruki integrali
2. izdanje

Recenzenti

Dr Gradimir Milovanović
Redovni član SANU

Dr Siniša Ješić
Vanredni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Izdaje i štampa
Akademska misao, Beograd

Dizajn naslovne strane
Zorica Marković, akademski slikar

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-650-0

Predgovor

Kako na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu ne postoji eksplicitno urađena zbirka zadataka koja pokriva prvu polovinu gradiva koja se izučava u sklopu Matematike 3, autori su odlučili da kroz ovu zbirku detaljno rešenih zadataka pomognu kako studentima elektrotehnike, tako i drugim studentima koji slušaju ovu ili done-kle sličnu materiju.

U zbirci je dato više od 300 zadataka iz oblasti funkcija više promenljivih, krivolinijskih, višestrukih i površinskih integrala, kao i tri rešena ispitna roka. Pored toga, postoje i zadaci za samostalni rad kod kojih je dato samo konačno rešenje. Autori su uočili da danas studentima više odgovaraju zbirke koje imaju detaljno urađena rešenja pa su se trudili da skoro svi zadaci imaju rešenja korak po korak. Kako je oduvek bilo teško predstavljati 3D prostor na tabli, uz većinu zadataka su postavljene slike, koje su rađene u više matematičkih programa i koje će Vam pomoći u razumevanju 3D prostora. Treba pomenuti da je za razumevanje, brže i uspešnije savladavanje ove zbirke neophodno predznanje iz matematike, naročito iz oblasti integro-diferencijalnog računa, koji se obrađuje na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu kroz predmete Matematika 1 i Matematika 2. Kompletan tekst je obrađen u sistemu \LaTeX .

Autori duguju posebnu zahvalnost recenzentima redovnom profesoru GRADIMIRU MILOVANOVIĆU, redovnom članu SANU i prof. dr SINIŠI JEŠIĆU, vanrednom profesoru Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, koji su pažljivo pročitali rukopis, otklonili greške, dali primedbe i sugestije i time pomogli da ova zbirka izgleda još kvalitetnije.

Iako je tekst više puta pročitao, moguće je da su se potkrale i neke logičke i gramatičke greške. Autori će sa zahvalnošću prihvatiti sve sugestije na otklanjanju uočenih grešaka i time poboljšati kvalitet zbirke. Adresa na koje se mogu slati sugestije je: vbecejac@gmail.com.

Beograd, februara 2013.

Autori

Predgovor drugom izdanju

U drugom izdanju su otklonjene sve greške koje su autori i kolege uočili. Zbirka je dopunjena sa 187 zadataka iz svih oblasti, tako da ona sada ima preko 500 zadataka, a uz veliki broj zadataka koji su za samostalni rad, tj. koji imaju samo rezultat, bez postupka rešavanja, dato je dosta komentara kako bi njihovo rešavanje bilo jednostavnije. Zadaci iz glave *Zadaci za samostalni rad* iz prvog izdanja su raspoređeni sada po odgovarajućim oblastima tako da u drugom izdanju ove glave nema, a dodata je podoblast *Kombinovani zadaci*. Takođe, sve slike iz prethodnog izdanja su ponovo urađene u moćnijim kompjuterskim alatima nego za prvo izdanje.



U zbirku je uneta nova oznaka koja označava ideju, uputstvo ili ukazuje na grešku koju su studenti pravili prilikom rešavanja.

Autori su svesni da i pored svih pregleda i prepravki što iz prvog, što iz drugog izdanja, da su se opet potkrale greške i nedostaci i sa velikom zahvalnošću će prihvatiti sve primedbe i sugestije, koje se mogu poslati na elektronske adrese cakic@etf.rs i vbeceljac@gmail.com.

U Beogradu, oktobra 2016.

Autori

Sadržaj

I	FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH	7
1	Koordinatni sistemi	13
1.1	Polarne koordinate	13
1.2	Cilindrične koordinate	14
1.3	Sferne koordinate	15
2	Dvojni limesi. Nепrekidnost	19
3	Parcijalni izvodi	33
4	Diferencijabilnost	47
5	Tejlorova i Maklorenova formula	53
6	Ekstremne vrednosti	59
II	KRIVOLINIJSKI, VIŠESTRUKI I POVRŠINSKI INTEGRALI	99
7	Krivolinijski integrali	107
7.1	Krivolinijski integrali prve vrste	107
7.2	Krivolinijski integral druge vrste	123
8	Dvojni integrali	147
9	Trojni integrali	209
10	Površinski integrali	231
10.1	Površinski integral prve vrste	231
10.2	Površinski integral druge vrste	241

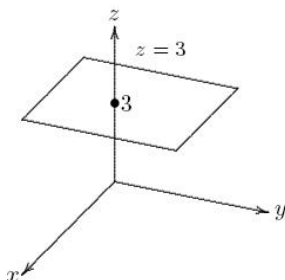
11	Teoreme koje daju veze između različitih tipova integrala	247
11.1	Grin - Rimanova teorema	247
11.2	Teorema Gaus-Ostrogradski	254
11.3	Stoksova formula	264
12	Kombinovani zadaci	273
III	Rešeni ispitni rokovi	277
13	Zadaci	281
13.1	22.08.2006.	281
13.2	09.09.2007.	283
13.3	25.01.2009.	284
14	Rešenja	287
14.1	22.08.2006.	287
14.2	09.09.2007.	290
14.3	25.01.2009.	293

Glava I

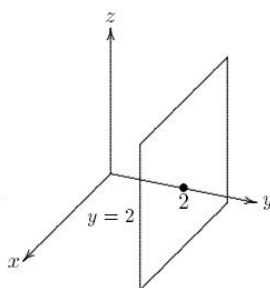
FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

1. Nacrtati u trodimenzionalnom prostoru površi a) $z = 3$, b) $y = 2$, c) $x = 2$.

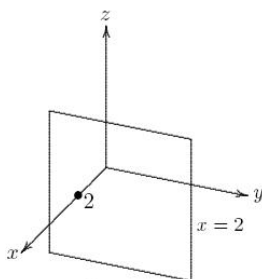
REŠENJE: a) Ovo je jednačina horizontalne ravni, paralelna sa xy ravni, koja se nalazi na visini 3 iznad xy ravni. Za bilo koji izbor x i y vrednost z koordinate je uvek 3.



b) Ovo je jednačina vertikalne ravni paralelne sa xz ravni na rastojanju 2 od nje.

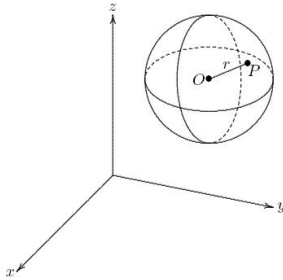


c) Ovo je jednačina vertikalne ravni paralelne sa yz ravni.



2. Nacrtati u trodimenzionalnom prostoru površ $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ gde su a, b, c i r proizvoljni realni brojevi.

REŠENJE: Ovo je opšta jednačina sfere u trodimenzionalnom prostoru sa centrom u tački (a, b, c) i poluprečnika r .



3. Pokazati da jednačina $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ predstavlja sferu. Pokazati da se data sfera i ravan $z = -1$ seku po kružnici $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

REŠENJE: Napišimo datu jednačinu u obliku

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 + z^2 + 2z + 1 - 1 + 6 = 0.$$

Dalje je

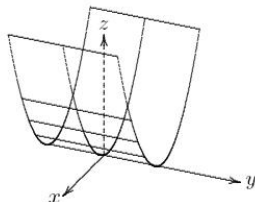
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8. \quad (1)$$

Iz ove jednačine možemo zaključiti da ovo jeste sfera sa centrom u tački $(-2, 3, -1)$ i poluprečnika $\sqrt{8}$. Ako u (1) zamenimo da je $z = -1$ dobijamo

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

4. Nacrtati u trodimenzionalnom prostoru sledeće površi a) $z = x^2$ b) $x^2 + y^2 = 1$ c) $y^2 + z^2 = 1$.

REŠENJE: a) Data jednačina je jednačina paraboloidnog cilindra.



b) Data površ je cilindar čija je baza krug poluprečnika 1. Cilindar se pruža duž z -ose.