

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE

TOM I

- OD PRAISTORIJE DO KRAJA ALEKSANDRIJSKE ERE -

Akadska misao
Beograd 2019.

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE

TOM I: OD PRAISTORIJE DO ALEKSANDRIJSKE ERE

Prvo izdanje ovog dela objavila je u Crnoj Gori Crnogorska akademija nauka i umjetnosti (CANU). U ovom izdanju ispravljene su uočene greške.

Recenzenti

Dr Milan Božić, redovni profesor, PMF, Beograd
Dr Franka Miriam Bruekler, docent, PMF, Zagreb

Izdaje i štampa

Akadska misao, Beograd

Dizajn naslovne strane

Blažo Bojić

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-808-5 (Tom I)

ISBN 978-86-7466-811-5 (niz)

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE

TOM II

- OD POČETKA SREDNJEG VIJEKA DO ZAVRŠETKA
NAUČNE REVOLUCIJE -

Akadska misao
Beograd 2019.

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE
TOM II: OD POČETKA SREDNJEG VIJEKA
DO ZAVRŠETKA NAUČNE REVOLUCIJE

Prvo izdanje ovog dela objavila je u Crnoj Gori Crnogorska akademija nauka i umjetnosti (CANU). U ovom izdanju ispravljene su uočene greške.

Recenzenti

Dr Milan Božić, redovni profesor, PMF, Beograd
Dr Franka Miriam Bruekler, docent, PMF, Zagreb

Izdaje i štampa

Akadska misao, Beograd

Dizajn naslovne strane

Blažo Bojić

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-809-2 (Tom II)

ISBN 978-86-7466-811-5 (niz)

Miodrag Perović

**ISTORIJA
MATEMATIKE**

TOM III

- OD EULERA DO SAVREMENE MATEMATIKE -

Akadska misao
Beograd 2019.

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE

TOM III: OD EULERA DO SAVREMENE MATEMATIKE

Prvo izdanje ovog dela objavila je u Crnoj Gori Crnogorska akademija nauka i umjetnosti (CANU). U ovom izdanju ispravljene su uočene greške.

Recenzenti

Dr Milan Božić, redovni profesor, PMF, Beograd
Dr Franka Miriam Bruekler, docent, PMF, Zagreb

Izdaje i štampa

Akadska misao, Beograd

Dizajn naslovne strane

Blažo Bojić

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-810-8 (Tom III)

ISBN 978-86-7466-811-5 (niz)

*Nataši,
bez koje bi sve imalo manje smisla*

Predgovor

Autor ove knjige nije historičar matematike, već matematičar koji je više od dvadeset godina predavao (i) historiju matematike. Knjiga koja se nudi čitaocu je moj odgovor na pitanje kako treba da izgleda kurs historije matematike, koje sam cijelo vrijeme držao otvorenim.

Otac historije Herodot dao je historiji zadatak da istraži (=istorija) kako je izgledala prošlost i objasni kako je nastala sadašnjost. Historičarka matematike Judith Grabiner u članku *Matematičar, historičar i historija matematike* (1975), dodaje:

Drugo pitanje - kako je nastala sadašnjost? - je centralno u historiji matematike, bilo da ga obrađuje historičar ili matematičar. Ali, [...] matematičaru sva matematika je savremena; ... antički Grci su [za njih] bili 'kolege iz drugog koledža' (Littlewood))[...]. Čime je historičar različit? Prvo, on će, ne ističući, biti više posvećen ... nematematičkoj prošlosti.

Stepen pažnje nematematičkoj prošlosti u knjizi čiji je predmet matematička prošlost je pitanje na koje svaki autor mora da da sopstveni odgovor. Parafrazirajući argumentaciju Richarda Feinmanna¹, možemo reći da, ako bi kurs historije matematike bio stavljen u kontekst opšte historije, onda bi u njemu najznačajnije djelo u historiji nauke - Newtonova *Principie* iz 1687. godine, dobila desetinama puta manji prostor nego *Veličanstvena Revolucija* iz 1688, iako već danas ta revolucija izgleda kao događaj od male važnosti u odnosu na *Principia*. Stoga kurs historije matematike, koji ima orijentaciju da bude dopuna kursu opšte historije, nema smisla.

Za matematičara, sva matematika je, zaista, savremena. Jer, dok u drugim naukama tokom vremena dolazi do promjena, koje imaju karakter

¹Richard Feinmann (1918–1988), američki fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku, za rezultate u kvantnoj mehanici, kaže da će Građanski rat u Americi 1860-ih kroz deset hiljada godina izgledati kao provincijski događaj u odnosu na otkriće Maxwellovih jednačina elektrodinamike iz iste decenije.

ispravki i odbacivanja starih shvatanja, u matematici toga nema. Jednom dokazana teorema dokazana je za sva vremena. (Uz preciziranje pojmova, kao što je, na primjer, odnos antičkog pojma površine i savremenog pojma mjere.) Stoga razvoj matematike ima cikličnu prirodu: neka teorema ili ideja porađa teoriju, zatim ponovo dolazi do uopštavanja dobijenih rezultata i nastaje novi ciklus spirale razvoja teorije na višem nivou apstrakcije.

Kad se piše o matematičkoj prošlosti, mora se uzeti u obzir i mišljenje o svrsi istorije matematike koje su iznijeli njeni stvaraoči. Leibniz je prije trista godina rekao:

Korist od nje nije u tome da Istorija može svakome dati njegove zasluge i da drugi mogu očekivati isto, već takođe da unaprijedi umjetnost otkrića i njegov metod učini poznatim kroz ilustrativne primjere.

Dvjesto godina kasnije, Henri Poincaré, jedan od najvećih matematičara u istoriji, kaže:

Ako hoćemo da predvidimo budućnost matematike, put koji treba slijediti je da se izučava istorija i aktuelno stanje naše nauke.

Imajući sve prethodno u vidu, ja sam napisao knjigu čiji predmet se uvijek zaokružuje kao *istorija matematičkih ideja*. Ova koncepcija ima prednost i zbog toga što omogućuje da donosimo pouzdane zaključke o stvarima o kojima nemamo dovoljno pouzdane dokumente.

Nažalost, kad neko piše o nekoj matematičkoj ideji, nailazi na poteškoće kakve opisuje sljedeći detalj iz istorije matematike. Hobbes je 1656. godine pisao mladom Wallisu o svojim zapažanjima o njegovim matematičkim radovima:

[...] Imam više sažaljenja za vas nego što zaslužujete. [...] [Traktat] o konusnim presjecima je tako prekriven krastama simbola, da ja nemam strpljenja da ispitujem da li su dokazi dobro ili pogrešno sprovedeni.

Wallis mu je otpisao:

[...] Nemate strpljenja da ispitujete [dokaze], to jest, na prostom engleskom, vi ih ne razumijete. [...] Ali, Sire, moram li ja da vam pričam samo basne da biste me slušali? Sire, oni nijesu pisani da ih čitate vi, već za one koji to mogu.

Ova epizoda pokazuje da knjiga čiji je zadatak da "unaprijedi umjetnost otkrića" pretpostavlja čitaoca kome je matematika bliska i koji je zainteresovan za umjetnost otkrića. To znači da je za čitanje tako koncipirane knjige nužno izvjesno matematičko znanje i matematička kultura.

Ipak, imajući u vidu događaj s Hobbesom, tokom pisanja knjige izbjegavao sam formalizam kad god je to bilo moguće, kako bi i čitalac sa skromnijim matematičkim obrazovanjem bio u stanju da takođe dobije predstavu o razvoju matematičkih ideja kroz istoriju.

Konačno, nijesam prihvatio stav² da su autori bez značaja za intelektu-

²Michel Foucault, *Riječi i stvari* (1966).

alnu istoriju; da je njihovim portretima suđeno da nestanu kao crteži u pijesku. Naprotiv, u mnogim slučajevima, nemoguće je odvojiti istoriju ideja od ličnih istorija ljudi u čijem umu su se te ideje rađale i razvijale. Zato će u ovoj knjizi čitalac naći dosta interesantnih detalja iz života velikih matematičara. Te djelove mogu čitati svi zainteresovani za biografije velikih ljudi.

Tako, na kraju, u ovoj knjizi za svakog ima po nešto. Poznavalac matematike dublje će proniknuti u samu matematiku. Istoričar će neki stari rad bolje razumjeti nego da ga sam čita. Filozof će na dostupan način steći uvid u interakciju između matematike i filozofije, koja postoji od rađanja ove dvije discipline u antičkoj Grčkoj.

Knjiga je podijeljena u tri toma koji pokrivaju tri istorijske epohe u razvoju matematike. Prvi tom pokriva period od predistorije do kraja aleksandrijske ere. U njemu je izvršena analiza perioda protomatematike i perioda kad su filozofija, nauka (prirodna filozofija) i matematika činile cjelinu. Tu je i razdvajanje ovih disciplina, i uzlet grčke matematike u Aleksandriji do nebeskih visina na krilima neprevaziđenih genija, Euklida, Arhimeda i Apolonija. Zatim je opisana promjena prouzrokovana usponom Rima i hrišćanstva, koja je porodila društvo u kojem matematika nije mogla da se razvija kao u antičkoj Grčkoj.

Drugi tom posvećen je srednjem vijeku (u Kini, Indiji, Kalifatu i Evropi), i obnavljanju grčkih znanja koje je proizvelo naučnu revoluciju i infinitezimalni račun.

U četiri glave trećeg toma (Evolucija analize, Evolucija geometrije, Evolucija algebre i Zasnivanje i filozofija matematike), prikazan je razvoj matematike od 1728, kad je na scenu stupio Euler, pa do danas. Predmet završne glave je rasprava o zasnivanju i prirodi matematike koja je vođena od kraja 1870-ih, kad su otkriveni euklidski modeli neeuklidske geometrije, koji su izazvali promjenu pogleda na prirodu matematike i pojmova istinitost i egzistencija u matematici. Konstrukcije realnih brojeva pomoću prirodnih, koje su otkrivene takođe tokom 1870-ih, nametnule su pitanje *šta je prirodni broj?* Odgovor koji su dali Frege i Russell doveo je do ponovnog susretanja matematike i (analitičke) filozofije.

U knjizi su dati detaljni prikazi i opširni isječci iz najvažnijih matematičkih knjiga i radova koji su mijenjali svijet. U prvom tomu to je učinjeno za Euklidove *Elemente*, kao najvažniju knjigu u istoriji matematike, na kojoj se prelama njena istorija. Takođe za niz Arhimedovih radova i za Apolonijeve *Konike*. U drugom tomu dat je detaljan prikaz Descartesove *Rasprave o metodi* i Newtonovih *Principia*. U trećem tomu, to isto je učinjeno za Eulerove, Lagrangeove, Gaussove, Cauchyjeve, Riemannove, Hilbertove i Poincaréove radove. Dat je takođe i prilično detaljan prikaz

radova iz filozofije matematike, od Fregea do Gödela.

Čitalac će naći i niz drugih stvari koje se ne mogu naći u drugim knjigama. Na primjer, izvršena je produbljena analiza razloga zbog kojih su pitagorejci razvili geometrijsku algebru i za niz tvrdjenja koja su oni dokazali dato je poređenje tih dokaza prije i poslije geometrizacije matematike. Objašnjene su i posljedice geometrizacije na dalji razvoj matematike. Dodatno je osvijetljeno pitanje koliko su Eudoksove proporcije za njega i Euklida, zaista, bile analogoni naših realnih brojeva. Zašto je Arhimed u svom infinitezimalnom metodu koristio statiku, uprkos tome što je Cavalieriev princip specijalni slučaj tog metoda, koji je Arhimed takođe koristio? Šta Sir Thomas Heath nije vidio u Arhimedovom radu *O spiralama*? Šta su neki savremeni historičari matematike pogrešno pročitali u Bolzanovim radovima? Takođe, u čemu griješe kad objašnjavaju rađanje topologije. I tako dalje.

U vezi sa mnogobrojnim citiranjima u knjizi, svrsishodna je sljedeća napomena. Fraza tipa: "Cantor 1895. godine definiše skup ovako ..." daje informaciju kad je i kako Cantor formulisao (deskriptivnu) definiciju skupa; fraza "Cantor (1895) definiše skup ovako ..." znači da je to bilo u radu Cantor (1895) navedenom u tekstu ili u Bibliografiji. (Umjesto Cantor (1895) pisali smo i (Cantor, 1895) kad se željelo izbjeći gomilanje zagrada.) Numeracija trinaest glava teče neprekidno kroz cijelu knjigu, jer se one, a ne tomovi, nastavljaju jedna na drugu. Tako II.5.2 znači Glava II, paragraf 5, tačka 2. Ako je oznaka glave ispuštena, onda se referenca odnosi na tekuću glavu. Pri pozivanju na Euklidove *Elemente*, "Stav II.5" znači "stav 5 u Knjizi II" i slično. Pri citiranju originalnih radova brojevi stranica su obično izostavljani. Razlog za to je to što smo najčešće raspolagali savremenim prepisima ili prevodima tih radova objavljenim u raznim zbornicima starih tekstova u kojima nema originalne paginacije. Većina opštih historijskih podataka, kao što su datum i mjesto historijskog događaja, preuzeta je iz knjiga navedenih na početku Bibliografije ili iz neke od relevantnih enciklopedija.

Izražavam zahvalnost recenzentima koji su mi ukazali na neke propuste u rukopisu. Akademik Milojica Jaćimović je nizom sugestija značajno doprinio poboljšanju teksta. Greške i nedostaci teksta koji su "preživjeli" su, naravno, autorovi.

Ova knjiga je pisana gotovo dvadeset godina tokom kojih je autor, sticajem okolnosti, niz godina naporno radio na više polja izvan matematike. Bez podrške moje supruge Natalije (Nataše) Perović, koja je više puta pročitala rukopis nego sam autor, knjiga vjerovatno ne bi bila napisana.

I, vjerovatno, ne bi bila završena zbog više sile, da autor nije postao pacijent prof. dr Josefa Kautznera, direktora kardiološke klinike na Insti-

tutu za kardiologiju i eksperimentalnu medicinu (IKEM) u Pragu, kojem upućujem prijatnu i duboku zahvalnost.

U Podgorici, septembra 2017.

Miodrag Perović

ISTORIJA MATEMATIKE SADRŽAJ

TOM I: OD PRAISTORIJE DO KRAJA ALEKSANDRIJSKE ERE

Glava I: PROTOMATEMATIKA

- §1. Protomatematika u predistoriji 1
 1. Istorija i predistorija (1). 2. Broj u predistoriji (2). 3. Elementi geometrije u predistoriji (5).
- §2. Egipatska protomatematika 5
 1. Civilizacija drevnog Egipta (5). 2. Nastanak protomatematike u Egiptu (7). 3. Istorijski izvori za egipatsku protomatematiku (10). 4. Egipatska aritmetika (11). 5. Egipatska algebra (14). 6. Egipatska geometrija (16). 7. Dodatak: Hilbertov treći problem (21).
- §3. Vavilonska protomatematika 22
 1. Mesopotamija (22). 2. Nastanak protomatematike u Mesopotamiji (24). 3. Istorijski izvori za vavilonsku protomatematiku (24). 4. Vavilonska aritmetika i teorija brojeva (25). 5. Vavilonska algebra (28). 6. Vavilonska geometrija (32).

Glava II: RAĐANJE MATEMATIKE U ANTIČKOJ GRČKOJ

- §1. Rađanje nauke, filozofije i matematike 37
 1. Grčka civilizacija (37). 2. Homer i Hesoid (39). 3. Sistematizacija znanja (40). 4. Filozofske (matematičke) škole antičke Grčke (42). 5. O istorijskim izvorima (43). 6. Katalog geometara (45). 7. O transkripciji grčkih imena (47).

- §2. Jonci, prvi matematičari 47
 1. Tales (47). 2. Sljedbenici (49).
- §3. Pitagorejci, osnivači matematike 51
 1. Pitagora i njegova škola (51). 2. Projekat *Sve je broj* kao zasnivanje matematike (55). 3. Prva kriza u zasnivanju matematike i njena geometrizacija (57). 4. Uticaj projekta *Sve je broj* u filozofiji i religiji (58). 5. Pitagorejska teorija proporcija – prva konstrukcija racionalnih brojeva (60). 6. Metodološki problemi u izgradnji geometrije izazvani otkrićem nesamjerljivih (62). 7. Pitagorina teorema prije i poslije otkrića nesamjerljivih (64). 8. Metodološki problemi u razvoju algebre izazvani geometrizacijom matematike i geometrijska algebra (65). 9. Dioba duži u srednjem i krajnjem odnosu (67). 10. Konstrukcija pravilnog petougla (69). 11. Aritmetika i teorija brojeva (70). 12. Još neki rezultati pitagorejaca (73). 13. Kvadrivijum – pitagorejska tradicija u obrazovanju (77).
- §4. Elejci i problem beskonačnosti 78
 1. Problem promjene (78). 2. Zenonovi paradoksi (79). 3. Potencijalna i aktualna beskonačnost (81). 4. Rigorozacija matematičkih dokaza (85).
- §5. Atomisti osporavaju osamostavljanje matematike 85
 1. Demokrit (85). 2. Atomizam (86). 3. Matematički atomizam (87). 4. Kritika matematičkog atomizma (92).
- §6. Atina: Razdvajanje matematike i filozofije 93
 1. Periklovo zlatno doba (94). 2. Sofisti (95). 3. Sokrat (96). 4. Atinska matematika do osnivanja Akademije (97). 5. Tri klasična geometrijska problema (98). 6. Hipokrat sa Kiosa: Prvi *Elementi* (105). 7. Hipija: Prva transcendentna kriva (107). 8. Dodatak: Nerješivost tri klasična problema (110).
- §7. Platon i početak filozofije matematike 116
 1. Život i djelo (116). 2. Teorija ideja (118). 3. Ideje i matematika: Platonova filozofija matematike (121). 4. Uloga matematike u Platonovoj kosmogoniji (126). 5. Platonov doprinos matematici (127).
- §8. Eudoks uvodi analitički postupak 133
 1. Život i djelo (133). 2. Definicija proporcije (135). 3. O stavovima Eudoksove teorije proporcija (141). 4. O aritmetici Eudoksovih proporcija (142). 5. 2200 godina kasnije: Dedekindova aritmetizacija Eudoksove definicije (144). 6. Teorija proporcija kao (geometrijska) konstrukcija realnih brojeva (146). 7. Metod ekshaustije (147). 8. Površina kruga (150). 9. Zapremina

- piramide (151). 10. Zapremina cilindra, konusa i lopte (154). 11. Menekmo otkriva konike (155).
- §9. Aristotel i logika 160
1. Život i djelo (161). 2. Aristotelova teorija saznanja (162). 3. Metafizika (163). 4. Aristotelova nauka (164). 5. Aristotelova logika (167). 6. Uloga logike u zasnivanju nauka i matematike (173). 7. Kraj helenske epohe (176).

Glava III: ALEKSANDRIJSKA ERA

- §1. Helenizam i širenje grčke matematičke tradicije 177
1. Fuzija Grka i Varvara (177). 2. Kulturne karakteristike helenizma (178). 3. Aleksandrija (179). 4. Muzej, centar svjetskog znanja (180). 5. Aleksandrijska matematika (182).
- §2. Euklidovi *Elementi* i trijumf aksiomatskog metoda..... 183
1. Euklid (183). 2. *Elementi* i aksiomatski metod (185). 3. Sadržaj i svrha *Elementata* (186). 4. Definicije, postulati i aksiome (189). 5. Stavovi Knjige I: Dokaz Pitagorine teoreme bez korišćenja teorije sličnosti (203). 6. Knjiga II: Geometrijska algebra (211). 7. Knjiga III: Krugovi, tetive, tangente (217). 8. Knjiga IV: Konstrukcija pravilnih mnogouglova (219). 9. Knjiga V: Teorija proporcija – prva konstrukcija realnih brojeva (220). 10. Knjiga VI: Teorija sličnosti (224). 11. Knjige VII, VIII, IX: "Aritmetičke knjige" (229). 12. Knjiga X: Klasifikacija nesamjerljivih (237). 13. Knjiga XI: Stereometrija (240). 14. Knjiga XII: Metod ekshaustije u planimetriji i stereometriji (244). 15. Knjiga XIII: Pravilni poliedri (244). 16. Apokrifi (248).
- §3. Arhimed: Infinitezimalni metod i početak matematičke analize ... 249
1. Život (249). 2. Radovi i rezultati (251). 3. Prećutani infinitezimalni metod (254). 4. Uloga Arhimedovih radova u istoriji analize (257). 5. O mjerenju kruga (262). 6. O ravnoteži ravnih tijela – aksiomatizacija statike (266). 7. Kvadratura parabole (270). 8. O sferi i cilindru (280). 9. O spiralama (291). 10. O konoidima i sferoidima (301). 11. Poslanica Eratostenu (Arhimedov kod) (309). 12. Ostali Arhimedovi radovi (316). 13. O Arhimedovim mehaničkim izumima (322).
- §4. Poslije Arhimeda – povratak sintetičkoj geometriji 326
1. Apolonije i *Konike* (326). 2. Rezime o teoriji konusnih presjeka do Apolonija (328). 3. Nova klasifikaciona svojstva konusnih

presjeka i termini parabola, hiperbola i elipsa (330). 4. Fokalna svojstva konusnih presjeka (335). 5. Fokalna svojstva kao definicija 2000 godina kasnije (339). 6. Još neki rezultati koji se prvi put sretaju kod Apolonija (340). 7. Još o sadržaju *Konika* (342). 8. Ostali Apolonijevi radovi (347). 9. Ostali geometri do kraja helenističke epohe (350).

- §5. Epoha rimske prevlasti na Mediteranu 358
 1. Promjene u grčkom svijetu koje je donijela prevlast Rima (358).
 2. Prototrigonometrija u krilu astronomije (360). 3. Ptolomej i *Almagest* (366). 4. Heron kao ilustracija duha vremena (369). 5. Neopitagorejci (374). 6. Diofant – prvi grčki algebričar (377).
- §6. Epoha komentatora i gašenje grčke matematike..... 385
 1. Pap(us) Aleksandrijski (385). 2. Serenus (392). 3. Teon i Hipatija (392). 4. Neoplatonistički krug (393). 5. Grčka antologija (399). 6. Nestanak grčke matematike (400). 7. Hronološki rezime grčke epohe (402).

TOM II: OD POČETKA SREDNJEG VIJEKA DO ZAVRŠETKA NAUČNE REVOLUCIJE

Glava IV: KINESKA I INDIJSKA MATEMATIKA

- §1. Kineska matematika 404
 1. Antička i srednjovjekovna Kina (404). 2. Filozofsko-naučne koncepcije stare Kine (405). 3. Koncepcija kineske matematike (406). 4. Periodizacija i historijski izvori (407). 5. Numeracija i aritmetika (411). 6. Algebra (413). 7. Geometrija (421). 8. Infinitesimalni metod - Cavalieriev princip (425).
- §2. Indijska matematika 427
 1. Hinduizam (428). 2. Periodizacija indijske matematike (429).
 3. Matematička epoha *sulvasutra* (430). 4. Matematička epoha *sindhanta* (432). 5. Indijska numeracija (436). 6. Algebra (438).
 7. Kombinatorika (446). 8. Geometrija i trigonometrija (447). 9. Keralska škola (450).

Glava V: MATEMATIKA U KALIFATU

- §1. Islamska civilizacija 453
 1. Arapi: Od oboda pustinje do stvaranja kalifata (454). 2. Preuzimanje antičkih znanja (455). 3. Islamska nauka (457). 4. Traženje sklada između filozofije i religije (461).
- §2. Zlatni vijek islamske matematike 463
 1. Konceptija islamske matematike (463). 2. Matematički pioniri iz Kuće mudrosti (465). 3. Indo-arapska numeracija (468). 4. Teorija brojeva (470). 5. Algebra (470). 6. Kombinatorika (480). 7. Geometrija (481). 8. Problem kvadrature (482). 9. Trigonometrija (485). 10. Fundiranje geometrije i peti postulat (487). 11. Završetak ere arapske dominacije (489). 12. Hronološki rezime islamske matematike (493).

Glava VI: EVROPSKI SREDNJI VIJEK

- §1. Rani srednji vijek 495
 1. Nestanak grčko-rimske civilizacije (495). 2. Karolinska (mala) renesansa (498).
- §2. Kasni srednji vijek 499
 1. Preuzimanje znanja (499). 2. Hristijanizacija grčke prirodne filozofije (503). 3. Prva osporavanja grčke prirodne filozofije i crkvenih dogmi (508). 4. Problem kretanja (511).
- §3. Evropska matematika u srednjem vijeku 512
 1. Matematika u Vizantiji (513). 2. Matematika u Zapadnoj Evropi do Fibonaccija (514). 3. Leonardo iz Pize – Fibonacci (516). 4. Od Leonarda do kraja trinaestog stoljeća (529). 5. Nicole Oresme: ideja o funkciji, koordinatnom sistemu i grafiku funkcije, konvergenciji i divergenciji reda (531).

Glava VII: RENESANSA I NAUČNA REVOLUCIJA

- §1. Renesansa 534
 1. Rana - italijanska renesansa (534). 2. Karakteristike renesanse (536). 2. Renesansna nauka do početka naučne revolucije (538). 3. Renesansna matematika do početka 1500-tih (539).
- §2. Naučna revolucija 541
 1. Preludijum naučne revolucije: Kopernik, Brahe i Kepler (542). 2. Novi rezultati u eksperimentalnim naukama do kraja XVI

stoljeća (550). 3. Galilejev eksperimentalni metod (553). 4. Descartes afirmiše racionalistički pristup nauci (561). 5. Period između Descartesa i Newtona (572). 6. Isaac Newton i trijumf nauke (576). 7. Pregled *Principia* (582). 8. Pravila rasuđivanja u prirodnoj filozofiji (603). 9. Rezime epohe od Galileja do Newtona (608). 10. Poslije Newtona (609).

Glava VIII: MATEMATIKA DO STVARANJA INFINITEZIMALNOG RAČUNA

- §1. Razvoj algebre u XVI i XVII vijeku 612
 1. Regola de la cosa i die coss (612). 2. Cardanova formula (614). 3. Kompleksni brojevi kao "fiktivna rješenja" algebarskih jednačina (617). 5. Vièteova pravila i formulacija osnovne teoreme algebre (619). 6. Slovna algebra – računanje sa slovima (621).
- §2. Novine u geometriji do kraja XVII stoljeća 626
 1. Novi prevodi antičkih matematičara (627). 2. Trigonometrija (628). 3. Koordinatni metod i algebraizacija euklidske geometrije (630). 4. Pregled eseja *La geometrie* (633). 5. Anali tička geometrija (639). 6. Koordinatni metod kao aritmetizacija geometrije (643). 6. Desargues aksiomatski zasniva projektivnu geometriju (644).
- §3. Decimalni razlomci, logaritmi i preludijum teorija brojeva 651
 1. Decimalni razlomci (651). 2. Logaritmi (652). Fermatov preludijum teorije brojeva (655).
- §4. Početak teorije vjerovatnoće 656
 1. Dva inicijalna zadatka (656). 2. Matematička nada (658). 3. Teorija vjerovatnoće (658). 4. Uslovna vjerovatnoća (659). 5. Bernoullijeva šema (659). 6. Statistika (660). 7. Petrogradski paradoks (660).

Glava IX: INFINITEZIMALNI RAČUN

- §1. Infinitezimalni metod za problem kvadrature 663
 1. Uvod (663). 2. Prvo pominjanje beskonačno malih (665). 3. Nove kvadrature pomoću principa ekshaustije (668). 4. Nedjeljive i Cavalieriev princip (671). 5. Nove kvadrature pomoću Cavalierievog principa (675).
- §2. Infinitezimalni metod za problem tangente 681

1. Problem tangente (681). 2. Problem brzine (682). 3. Fermatov metod (683).
- §3. Iste nedjeljive u problemu kvadrature i problemu tangente.....688
 1. Pascalov karakteristični trougao (688). 2. Problem rektifikacije (691).
- §4. Ostrvski rezime: Newtonovi prethodnici u Velikoj Britaniji.....694
 1. Wallis i *Arithmetica infinitorum* (695). 2. Stepeni redovi kao sredstvo aritmetike infinitorum (701). 3. Barrowljeva geometrijska sinteza diferencijalnog i integralnog račna (704). 4. Preciziranje ideje o funkciji (707).
- §5. Newtonova sinteza.....708
 1. Newtonov finale ostrvskog rezimea (709). 2. Diferencijalni račun 1665–1666 (713). 3. Osnovna teorema infinitezimalnog računa 1665–1666 (718). 4. Razvoji elementarnih funkcija u stepeni red 1665–1669 (721). 5. Fluenta, fluksija i moment (728). 6. Problem zasnivanja pojmova 1676–1704 (731). 7. Interpolacija i Taylorova formula 1676–1711 (737).
- §6. Leibnizov sintetički pristup sumiranju i diferenciranju.....739
 1. Redovi 1672–1673 (740). 2. Karakteristični trougao u novim oznakama 1673–1675 (740). 3. Osnovna teorema kao veza između suma i diferenci 1675–1676 (743). 4. Superiorni simbolizam koji sam računa 1676–1686 (744). 5. Sistematizacija braće Bernoulli (751). 6. Obične diferencijalne jednačine (753). 7. Rezime (755). 8. Kontroverza oko prioriteta (756). 9. Dva Newtonova pisma Leibnizu (759). 10. Dodatak: Napomena o nestandardnoj analizi (760).

TOM III: OD EULERA DO SAVREMENE MATEMATIKE

Glava X: EVOLUCIJA MATEMATIČKE ANALIZE

- §1. Analiza Eulerove epohe.....761
 1. Uvod (761). 2. Razvoj infinitezimalnog računa (765). 3. Bernoullijevi brojevi (767). 4. Redovi (772). 5. Beskonačni proizvodi (779). 6. Zeta funkcija (781). 7. Eulerova definicija funkcije (782). 8. Eulerova formula i unifikacija teorije elementarnih funkcija (783). 9. Ograničenja Eulerove definicije funkcije (794).

10. Lagrangeova algebraizacija analize (798). 11. Lista još nekih tema Eulerove epohe (812).

- §2. Rigorozacija analize 819
1. Potreba za rigorozacijom infinitezimalnog računa (819).
 2. Gauss koristi neformulisanu aksiomu supremuma (825).
 3. Bolzano vidi rigorozaciju u aritmetizaciji analize (827).
 4. Cauchyjeva rigorozacija i *Cours d'analyse* (840).
 5. Pregled knjige *Cours d'analyse* (844).
 6. Infinitezimalni račun u Cauchyjevom ruhu (850).
 7. Cauchyjeva definicija integrala neprekidne funkcije (851).
 8. Razlikovanje realne i kompleksne analize (853).
 9. Abel otkriva Cauchyjeve greške (854).
 10. Fourier i Dirichlet: Završna forma definicije funkcije (856).
 11. Riemann: Nova definicija integrala i razdvajanje diferencijalnog i integralnog računa (860).
 12. Finale: Weierstrassova rigorozacija (863).
 13. Aritmetizacija analize – aritmetičke konstrukcije skupa realnih brojeva (866).
 14. Početak razvoja teorije skupova i opšte topologije za potrebe analize (871).
 15. Difuzija Weierstrassovih ideja (873).
- §3. Analitičke funkcije..... 875
1. Princip permanencije (875).
 2. Cauchyeva teorija analitičkih funkcija (879).
 3. Riemannova geometrijska teorija analitičkih funkcija (894)
 4. Weierstrassova teorija analitičkih funkcija (900).
 5. Teorija funkcija više kompleksnih promjenljivih (904).
- §4. Integral i mjera 912
1. Jordanova mjera i Riemannov integral (912).
 2. Borelova mjera (919).
 3. Lebesgueova mjera i integral (920).
 4. Stieltjesova i Radonova mjera (927).
 5. Dodatak: Vjerovatnoća i mjera (932).
- §5. Funkcionalna analiza..... 943
1. Integralne jednačine Volterra i Fredholma (943).
 2. Hilbertov prostor (946).
 3. Transformacija u teoriju o funkcionalama na linearnom prostoru (948).
 4. Riesz: Prostori $L^p[a, b]$, $p \geq 1$, (949).
 5. Banach i poljska škola (952).
 6. Lokalno konveksni prostori (955).
 7. Teorija distribucija (955).

Glava XI: EVOLUCIJA GEOMETRIJE

- §1. Od Descartesa do Mongea..... 959
 1. Analitička geometrija (959). 2. Preludijum diferencijalne i algebarske geometrije (961). 3. Monge formira geometrijsku školu na École polytechnique (966).
- §2. Projektivna geometrija..... 969
 1. Ponceletove koncepcije (969). 2. Nemetričko zasnivanje projektivne geometrije (972). 3. Koordinatni metod u projektivnoj geometriji (975).
- §3. Geometrija Lobačevskog..... 980
 1. Dokazivanje petog postulata (980). 2. "Dokazi" svodenjem na apsurd (982). 3. Gauss, Bolyai, Lobačevski: sumnja u tačnost petog postulata (985). 4. Taurinusov analitički ekperiment (987). 5. Rezultati Lobačevskog (988). 6. Dokaz relativne koherentnosti: euklidski modeli neeuklidske geometrije Lobačevskog (992).
- §4. Diferencijalna geometrija..... 993
 1. Gaussova teorija površi (993). 2. Od Gaussa do Riemanna (997). 3. Riemann: O hipotezama koje leže u osnovama geometrije (999). 4. Riemannova geometrija (1004). 5. Geometrija Lobačevskog kao primjer Riemannove geometrije (1007). 6. Tenzorski račun i Riemannov tenzor krivine (1011). 7. Paralelizam Levi-Civita (1013).
- §5. Grupe i geometrija..... 1014
 1. Uvod (1014). 2. Erlangenski program: Geometrija kao teorija invarijanti neke grupe (1016). 3. Geometrija (X, G) kao prototip današnje matematičke strukture (1018). 4. Primjeri geometrija (1018). 4. Hijerarhizacija geometrija (1020).
- §6. Cartanova Sinteza Riemannove i Kleinove koncepcije 1024
 1. Teorija relativnosti i povezanost Levi-Civita (1024). 2. Cartanovo objedinjavanje koncepcija: povezanost na mnogostrukosti (1025). 3. Diferencijalna geometrija poslije Cartana (1027)
- §7. Topologija..... 1028
 1. Uvod (1028), 2. Opšta topologija (1030). 3. Algebarska topologija – počeci (1035). 4. Poincaré uvodi homotopiju i homologiju (1041). 5. Od Poincaréa do početka 1930-ih (1043). 6. Poincaréova hipoteza (1051). 7. Diferencijalna topologija (1052)

Glava XII: EVOLUCIJA ALGEBRE

- §1. Od Cardanove formule do teorije Galois 1054
1. Od fiktivnih do kompleksnih brojeva (1054), 2. Osnovna teorema algebre (1057). 3. O predstavljuvosti rješenja u radikalima (1059). 4. Abel: Problem je nerješiv za $n > 4$ (1064). 5. Teorija Galois (1066). 6. Promjene koje je donijela teorija Galois (1072).
- §2. Od sistema linearnih jednačina do linearne algebre 1072
1. Determinante (1072). 2. Bilinearne forme (1075). 3. Matrice, linearne transformacije i vektorski prostori (1077). 4. Linearna algebra (1081).
- §3. Traganje za višedimenzionalnim brojevima..... 1081
1. Kvaternioni (1081). 2. Hiperkompleksni sistemi (1084). 3. Asocijativne algebre (1087).
- §4. Rađanje apstraktne algebre..... 1088
1. Od grupe permutacija do apstraktne teorije grupa (1089). 2. Prsteni, tijela, polja i moduli brojeva (1093). 3. Prsteni, polja, algebre i moduli koji nijesu brojevi (1094). 4. Apstraktni prsten, polje, algebra, modul (1098). 5. Finale: Aksiomatsko-strukturalni pristup (1099). 6. Dodatak: "Ideološka" algebraizacija matematike i matematičke strukture (1101).
- §5. Algebarska geometrija 1105
1. Do početka XIX stoljeća (1106). 2. Eliptički integrali (1107). 3. Eliptičke funkcije i krive (1109). 4. Abelovi integrali (1110). 5. Abelovi integrali na Riemannovoj površi (1111). 6. Algebarske krive kao Riemannove površi (1114). 7. Algebarske površi (1120). 8. Algebarske mnogostrukosti nad proizvoljnim poljem (1122).
- §6. Teorija brojeva 1126
1. Od protomatematike do Fermata (1126). 2. Od Fermata do Eulera (1131). 3. Od Eulera do Gaussa (1131). 4. Gauss i *Disquisitiones Arithmeticae* (1134). 5. Algebarski brojevi (1142). 6. Kumerovi idealni brojevi (1144). 7. Dedekindova teorija algebarskih brojeva (1144). 8. Teorija algebarskih brojeva nakon Dedekinda (1148). 9. Distribucija prostih brojeva (1150). 10. Diofantove aproksimacije (1154). 11. Transcendentni brojevi (1158). 12. Diofantove jednačine (1161). 13. Milenijumski problemi - (1167).

Glava XIII: ZASNIVANJE I FILOZOFIJA MATEMATIKE

§1. Zasnivanje matematike od <i>Elementata</i> do kraja 1870-ih	1169
1. Geometrija: Aksiomska teorija o fizičkom prostoru (1169). 2. Aritmetika: Teorija o brojevima čija aksiomatizacija nije potrebna (1170). 3. Šta se još podrazumijevalo (1170).	
§2. Od Aristotelove do matemtičke logike	1170
1. Od Aristotela do kraja šesnaestog stoljeća (1170). 2. Prve ideje o matemtičkoj logici (1173). 3. Leibnizova <i>ars combinatoria</i> – prve ideje koje izlaze iz okvira Aristotelove logike (1174). 4. Boolova algebraizacija Aristotelove logike (1176). 5. Pierce i Frega: Matemtička logika umjesto matemtičarije logike (1178). 6. Fregeov <i>Zapis pojmova</i> – kvantifikatorski račun drugoga reda (1181). 7. Fregeova aksiomatizacija logike (1185). 8. Peanov <i>Formular matematike</i> (1188).	
§3. Promjena pogleda na matematiku krajem 1800-tih	1189
1. Cantorova teorija beskonačnih skupova (1190). 2. Promjena pogleda na aksiomatski metod: Formalni sistem aksioma (1192). 3. Peanove aksiome: Formalni sistem aksioma za aritmetiku (1194). 4. Formalni sistemi aksioma za geometriju (1196). 5. Matemtičari i filozofi obznanjaju novi – formalni karakter matematike (1197). 6. Novi pogled na pitanje istinitosti (1199). 7. Novi pogled na prirodu egzistencije matemtičkih objekata (1200). 8. Poincaréov rezime (1200)	
§4. Druga kriza u zasnivanju matematike i formalni sistem aksioma teorije skupova	1201
1. Paradoksi naivne teorije skupova (1201). 2. Zermelov sistem aksioma teorije skupova (1204). 3. Aksiomska teorija skupova kao zasnivanje matematike (1210).	
§5. Filozofija matematike	1210
1. Predmet filozofije (1211). 2. Filozofija nauke (1211). 3. Filozofija matematike (1212). 4. Platonizam (1212). 5. Empirizam i matematika (1218). 6. Kantova teorija saznanja (1219). 7. Logizam (1224). 8. Intuicionizam (1232). 9. Formalizam (1247).	
BIBLIOGRAFIJA	1263
INDEX	1279