Ćemal Dolićanin, Đorđe Dugošija

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE II

Akademska misao
Državni univerzitet u Novom Pazaru
Beograd, 2019.

Ćemal Dolićanin, Đorđe Dugošija

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE II

Recenzenti
prof. dr Stevan Pilipović
prof. dr Miloš Arsenović
prof. dr Stojan Radenović
prof. dr Boško Damjanović
doc. dr Miljan Knežević

Izdavači
Akademska misao, Beograd
Državni univerzitet u Novom Pazaru, Novi Pazar

Štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-86893-92-5

Sadržaj

Predgovor

Udžbenik *Fundamenti matematičke analize II*, koji je pred vama, predstavlja nastavak udžbenika *Fundamenti matematičke analize I* istih autora. On pokriva gradivo iz matematičke analize, predviđeno za rad u drugom semestru studija (diferencijabilnost i integrabilnost u E^n, nesvojstveni i integrali s parametrima). Namenjen je studentima matematike i informatike Državnog univerziteta u Novom Pazaru, ali i predavačima i studentima drugih fakulteta koji izučavaju matematiku koja u svom programu sadrži gradivo ove knjige.

Pristup gradivu je učinjen na savremen način, što ga naročito karakteriše. Akcenat je istovremeno i na kratkoću i na dubinu proučavanja. Da bi se to postiglo način izlaganja i dokazi nekih delova su originalni i jedinstveni u literaturi. Direktno je obrađivana analiza u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, a analiza funkcija jedne realne promenljive je urađena kao primer opštije teorije. Time se dobija na vremenu i izbegava nepotrebno ponavljanje. Detaljno urađeni primeri pokazuju i bogatu mogućnost primena izvedene teorije u drugim oblastima. Posebno je detaljno i originalno urađen problem optimizacije sa diferencijabilnim ograničenjima. Knjiga sadrži i izvestan broj odabranih zadataka za vežbanje čija težina varira od elementarnih do teških.

Zahvaljujemo se recenzentima: redovnom članu SANU prof. dr Stevanu Pilipoviću, prof. dr Milošu Arsenoviću, prof. dr Stojanu Radenoviću, prof. dr Bošku Damjanoviću i doc. dr Miljanu Kneževiću na sugestijama i ispravkama koje su učinile ovu knjigu boljom. Takođe se zahvaljujemo našim saradnicima dr Emiru Zogiću i mast. mat. Enesu Kačaporu koji su dali veliki doprinos u tehničkoj, i inače, finalizaciji knjige.

U Beogradu i Novom Pazaru, maj 2019. *Autori*

Deo I
Diferencijabilnost

Diferencijalni račun koji ćemo izložiti standardni je deo tzv. kalkulusa koji se predaje na početnim godinama gotovo svih studija koje se baziraju na matematici. Njegovi začetnici su Isak Njutn[1] i Gotfrid Lajbnic[2]. Teorija je stara oko 300 godina i ima ogromnu važnost za napredak ljudske civilizacije, kao i brojne primene.

[1]Sir Isaac Newton, 1643–1727, engleski matematičar.
[2]Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, nemački matematičar.

Glava 1

Izvod funkcija. Specijalni slučajevi. Izvod u pravcu. Parcijalni izvodi. Gradijent

1.1 Izvod funkcija

Razmatraćemo funkcije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, tj. funkcije od n realnih promenljivih sa vrednostima u $\mathbb{R}^m$. Svaka takva funkcija je uređena m-torka realnih funkcija od n promenljivih, tj. funkcija oblika

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big).$$

Za funkcije $f_1, f_2, \dots, f_m$ kažemo da su *komponente* funkcije f.

Radi uprošćenja zapisa, u daljem izlaganju ćemo tačke iz $\mathbb{R}^k$ poistovećivati sa matricom kolonom njihovih koordinata u standardnoj bazi prostora $\mathbb{R}^k$.

Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} X$ i $f : X \to \mathbb{R}^m$. Za $h \in \mathbb{R}^n$ dovoljno malo po normi je $a + h \in X$. Izraz

$$f(a+h) - f(a)$$

predstavlja *promenu* funkcije kad se argument promeni od a do $a + h$.

Definicija 1.1.1. Ako je

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + r_a(h),$$

pri čemu je $L_a(h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna funkcija, a $r_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takva da $\dfrac{r_a(h)}{\|h\|} \to 0$ kad $h \to 0$, kažemo da je f *diferencijabilna u tački* a, a za funkciju L_a da je njen *izvod u tački* a, u oznaci $f'(a)$ ili Df_a.

Linearnom preslikavanju $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u paru standardnih baza prostora $\mathbb{R}^n$, odnosno $\mathbb{R}^m$, odgovara realna matrica A_a formata $m \times n$ takva da je

$$L_a(h) = A_a \cdot h.$$

Matrica A_a naziva se *Jakobijeva*[3] *matrica izvoda u tački* a (i poistovećuje često sa $f'(a)$).

Definicija 1.1.2. Funkcija $df_a(h) = A_a h$ je mera promene funkcije f u tački a sa promenom argumenta (dakle zavisi i od a i od promene argumenta h) i naziva se *diferencijal* funkcije f u tački a.

Otuda i potiče naziv *diferenciranje*. Definicija izvoda je korektna jer važi sledeća teorema.

Teorema 1.1.1. Ako je f diferencijabilna u tački a, onda je njen izvod jedinstven.

Dokaz. Neka su A i B Jakobijeve matrice izvoda u tački a. Tada je $Ah + r_1(h) = Bh + r_2(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $r_1(h)/\|h\| \to 0$, $r_2(h)/\|h\| \to 0$ kad $h \to 0$. Zato je

$$(A - B)h = r_2(h) - r_1(h) = o(\|h\|).$$

Za $h = te$, $\|e\| = 1$, $t \to +0$, dobijamo da je

$$\left\| \frac{(A-B)te}{\|te\|} \right\| = \|(A-B)e\| < \varepsilon$$

za svako $\varepsilon > 0$, čim je t dovoljno malo. Zato je $(A - B)e = 0$ za svako e, $\|e\| = 1$, pa i kad se za e biraju elementi standardne baze od $\mathbb{R}^n$. Zato je svaka kolona matrice $A - B$ jednaka nuli, pa je $A = B$. $\square$

Saglasno definiciji izvoda afino-linearna funkcija $g(x) = f(a) + A_a(x - a)$ u maloj okolini tačke a dobro aproksimira funkciju f diferencijabilnu u tački a. Njen grafik

$$G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y = f(a) + A(x - a)\}$$

naziva se *tangentna mnogostrukost* grafika funkcije f u tački $(a, f(a))$.

Iz definicije izvoda neposredno sledi teorema:

Teorema 1.1.2. Ako funkcija ima izvod u tački a, onda je u njoj neprekidna.

U opštem slučaju, obrnuto ne važi.

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, nemački matematičar.

1.2 Specijalni slučajevi

Primer 1.2.1. U slučaju da je $X \subset \mathbb{R}$, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački $a \in \operatorname{int} X$ ako i samo ako postoji realan broj $f'(a)$ takav da je $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$, $h \to 0$, ili ekvivalentno tome

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Broj $f'(a)$ predstavlja *brzinu promene funkcije*.

Za identitetu $i(x) = x$ očigledno da je izvod jednak $i'(x) = 1$, pa je diferencijal $di(x) = dx = 1 \cdot h = h$, odakle dobijamo da je izvod zapravo količnik diferencijala funkcije f i diferencijala identitete:

$$f'(x) = \frac{df}{dx},$$

što predstavlja Lajbnicov zapis izvoda.

Koristeći teoriju izvedenu u prvoj knjizi, jednostavno je dokazati diferencijabilnost elementarnih realnih funkcija u unutrašnjim tačkama njihovih domena. Tako dobijamo tablicu izvoda.

Tablica izvoda nekih elementarnih funkcija

$f(x)$	c	$x^n, n \in \mathbb{N}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Primer 1.2.2. Funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, diferencijabilna je svuda, osim u tački $a = 0$.

Preciznije, u tački $a = 0$ postoje *desni izvod*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1$$

i *levi izvod*

$$f'_-(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -1,$$

ali oni nisu jednaki. U svim ostalim tačkama ova funkcija ima izvod, koji je jednak 1 u pozitivnim, odnosno -1 u negativnim tačkama.

Predstava o fizičkom prostoru u kojem živimo menja se kada se uoče primeri neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$ koje ni u jednoj tački nemaju izvod. Takva je, na primer, funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4^n x)}{2^n}.$$

Dokaz prethodne tvrdnje nije jednostavan i može se naći u specijalizovanim knjigama.

Primer 1.2.3. Ako je $X = [a, b]$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big)$, onda je funkcijom f predstavljeno *kretanje* u prostoru $\mathbb{R}^m$. Izvod

$$f'(x) = \big(f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_m'(x)\big),$$

ako postoji, predstavlja *brzinu* u trenutku x.

Jakobijeva matrica izvoda linearne funkcije $L(x) = Ax$ u bilo kojoj tački a je A, jer je

$$L(a + h) - L(a) = L(h) = Ah.$$

U cilju izračunavanja izvoda, navešćemo sledeću važnu teoremu.

Teorema 1.2.1. Neka su date funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Ako $x \in \mathrm{int}X$ i postoje $f'(x)$ i $g'(x)$, onda važi:

(*a*) $(f + g)' = f' + g'$;

(*b*) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;

(*c*) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g(x) \neq 0$.

Dokaz. Neka su A i B odgovarajuće Jakobijeve matrice. Tvrđenja slede iz:

$$f(x + h) + g(x + h) = f(x) + g(x) + (A + B)h + o(\|h\|);$$

$$f(x + h) \cdot g(x + h) = \big(f(x) + Ah + o(\|h\|)\big)\big(g(x) + Bh + o(\|h\|)\big) =$$

$$= f(x)g(x) + \big(Ag(x) + Bf(x)\big)h + o(\|h\|);$$

$$\frac{1}{g(x + h)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + h)}{g(x)g(x + h)} = \frac{-Bh}{g^2(x)} + \left(\frac{B}{g^2(x)} - \frac{B}{g(x)g(x + h)}\right) h + o(\|h\|),$$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}. \qquad \square$$

Primer 1.2.4. Naći $(x^4 + \arcsin x)'$.

Imamo

$$(x^4 + \arcsin x)' = (x^4)' + (\arcsin x)' = 4x^3 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Primer 1.2.5. Naći $(\operatorname{tg} x)'$.

Imamo

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos x - \cos'(x)\sin x}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Primer 1.2.6. Naći $\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right)'$.

Imamo

$$\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right)' = \frac{(\ln x)'\sin x - \ln x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{x}\sin x - \ln x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x\ln x\cos x}{x\sin^2 x}.$$

Teorema 1.2.2 (izvod kompozicije). Neka je x unutrašnja tačka domena $X \subset \mathbb{R}^n$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}^m$, a $y = f(x)$ unutrašnja tačka domena funkcije $g : f[X] \to \mathbb{R}^k$. Ako postoje $A = f'_x$, $B = g'_y$, onda je izvod kompozicije $g \circ f$ u tački x jednak

$$(g \circ f)'_x = B \cdot A.$$

Dokaz. Imamo

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y + Ah + r(h)) - g(y) = B \cdot (Ah + r(h)) + s(Ah + r(h)) =$$

$$= BAh + Br(h) + s(Ah + r(h)).$$

Teorema će biti dokazana ako dokažemo da

$$\frac{Br(h) + s(Ah + r(h))}{\|h\|} \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0.$$

Koristićemo pojam norme realne matrice $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\|A\| = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

Prepuštamo čitaocu da dokaže da je ovo zaista norma i da za proizvod matrica važi nejednakost $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Primenom ove nejednakosti nalazimo

$$0 \leq \left\|\frac{Br(h)}{\|h\|}\right\| = \left\|B \cdot \frac{r(h)}{\|h\|}\right\| \leq \|B\| \cdot \left\|\frac{r(h)}{\|h\|}\right\|.$$

Kako $\dfrac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ kad $h \to 0$, sledi da $\dfrac{Br(h)}{\|h\|} \to 0$. Kako je f neprekidna u tački x, imamo da $k = Ah + r(h) \to 0$ kad $h \to 0$. Iz

$$\left\|\frac{s(Ah + r(h))}{\|h\|}\right\| = \left\|\frac{s(k)}{\|k\|} \cdot \frac{\|k\|}{\|h\|}\right\| \leq \left\|\frac{s(k)}{\|k\|}\right\| \cdot \left(\|A\| + \left\|\frac{r(h)}{\|h\|}\right\|\right),$$

zbog $\dfrac{s(k)}{\|k\|} \to 0$ kad $h \to 0$ (što dokazujemo smenom promenljive), vidi se da i

$$\frac{s(k)}{\|h\|} \to 0.$$

Time je teorema dokazana. $\square$

Primer 1.2.7. $((\sin e^{x^2})' = \sin'(e^{x^2}) \cdot (e^{x^2})' = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$.

Primer 1.2.8. Ako je

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7},$$

dokazati da je $f'\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Rešenje. Iz $f'(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$ i $x = \dfrac{\pi}{9}$ imamo da je

$$f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2} + 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} =$$

$$= \frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}.$$

Primer 1.2.9. Neka je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na $X \subset \mathbb{R}^n$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^m$. Tada je $F(x) = \|f(x)\|^2$, kao kompozicija funkcija $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, i $y \mapsto g(y) = \|y\|^2$, $y \in \mathbb{R}^m$, diferencijabilna na X i

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2f(x)^T \cdot A_x.$$

1.3 Izvod u pravcu. Parcijalni izvodi. Gradijent

Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ i $h \in \mathbb{R}^n$ fiksirana tačka različita od nule.

Definicija 1.3.1. Izvod realne funkcije $t \mapsto f(a+th)$ u nuli (ako postoji) naziva se *izvod u pravcu* h. U slučaju da se ograničimo samo na $t \to +0$ dobijamo *izvod u smeru* h.

Ako je f diferencijabilna u a, tada je $f(a+th) = f(a) + tAh + o(t)$, $t \to 0$, ili

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'_a h,$$

pa izvod u pravcu h postoji i jednak je Ah.

Definicija 1.3.2. Ako su $f_1, f_2, \ldots, f_m$ komponente funkcije f, izvod funkcije

$$x_j \to f_i(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n)$$

u tački a_j (ako postoji) naziva se *parcijalni izvod funkcije* f_i *u tački* a, i označava sa $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

On je zapravo izvod u pravcu jediničnog vektora e_j. Iz tog razloga je Jakobijeva matrica A_a zapravo matrica

$$A_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

U skladu s tim, pravilo kompozicije diferencijabilnih preslikavanja dobija oblik: ako je

$$A = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Jakobijeva matrica funkcije $f(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, diferencijabilne u tački x, a

$$B = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_l)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$$

Jakobijeva matrica funkcije $g : f[X] \to \mathbb{R}^l$ diferencijabilne u tački $y = f(x)$, onda je Jakobijeva matrica kompozicije $h = g \circ f$ u tački x jednaka

$$B \cdot A = \frac{\partial(h_1, h_2, \ldots, h_l)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_l)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

ili

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i = 1, 2, \ldots, l \\ j = 1, 2, \ldots, n}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right)_{\substack{i = 1, 2, \ldots, l \\ j = 1, 2, \ldots, n}}.$$

Ovo se ponekad naziva *lančasto pravilo*.