

Branko D. Kovačević

Zoran Đ. Banjac

Željko M. Đurović

# **FILTRACIJA STOHAŠTIČKIH SIGNALA**

Optimalni, adaptivni i robusni estimatori  
parametara i stanja

Akadska misao  
Beograd 2017.

Branko D. Kovačević, Zoran Đ. Banjac, figrlm M. wtqxx

**FILTRACIJA STOHAŠTIČKIH SIGNALA**  
**Optimalni, adaptivni i robusni estimatori parametara i stanja**

*"Tgegp/gpvk*  
Rtqh0f t'F w-ep'F tclk  
Rtqh0f t'Nklcpc'O kkk

*Izdaje i štampa*  
Akademska misao, Beograd

*Tiraž*  
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-697-5

# Predgovor

Ova knjiga predstavlja izmenjeno i dopunjeno izdanje monografije „Adaptivni digitalni filtri“, koju su autori objavili 2004. godine, a publikovana je od strane izdavača Akademska misao iz Beograda.

U želji da se čitaocima još više približe definicije i pojmovi iz oblasti estimacije, dodata su četiri nova poglavlja koja se bave generalnim principima estimacije slučajnih promenljivih i stohastičkih signala, optimalnim filtriranjem stohastičkih signala na bazi Vinerove i Kalmanove teorije optimalne estimacije, projektovanjem adaptivnih estimatora u nestacionarnom okruženju i sintezom robusnih estimatora u uslovima nepotpune apriorne informacije o statističkim karakteristikama stohastičkog okruženja. Izlaganje u preostalim poglavljima zasniva se na materijalu koji je prikazan u pomenutoj monografiji, ali su izlaganja propraćena i dopunskim tekstovima koji su bazirani na rezultatima naučno-istraživačkog rada autora u poslednjoj deceniji.

Primitimo, takođe, da je ova, kao i prethodna, knjiga nastala kao rezultat višedecenijske saradnje Odeljenja za obradu signala pri Institutu za primenjenu matematiku i elektroniku u Beogradu i Katedre za automatiku, iz koje je izrastao današnji Odsek za signale i sisteme, Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Autori izražavaju posebnu zahvalnost kolegama i saradnicima iz pomenutih institucija, kao i recenzentima na korisnim sugestijama i savetima koji su doprineli poboljšanju kvaliteta teksta.

Ova knjiga prevashodno je namenjena studentima redovnih i poslediplomskih studija Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, a pre svega studentima Odseka za signale i sisteme, ali može korisno poslužiti i svima onima koji nisu imali priliku da savladaju važnu oblast matematičkog modelovanja i estimacije parametara i/ili stanja, usvojene matematičke reprezentacije sistema na osnovu raspoloživih zašumljenih merenja na realnom sistemu. U knjizi su dati mnogi eksperimentalni rezultati i tretirani su aspekti praktične primene modelovanja i identifikacije sistema u realnim uslovima. Algoritmi i rešenja razmatrani u ovoj knjizi mogu naći svoju primenu u širokom području obrade i prenosa signala i upravljanju sistemima, kao i za obradu realnih signala različite fizičke prirode (signali govora i slike, biomedicinski signali, seizmološki signali, meteorološki signali, signali radara, sonara, satelita i drugih inteligentnih senzora). Stoga, knjiga može korisno poslužiti i inženjerima različitih profila koji se u svojoj praksi susreću sa problemima matematičkog modelovanja prirodnih ili veštački izazvanih pojava.

Efikasno praćenje izložene materije podrazumeva da čitalac poseduje osnovna znanja iz inženjerske matematike, koja se stiču na prve dve godine studija tehnike, a obuhvataju oblasti

linearne algebre, matematičke analize, kompleksne analize, numeričke analize i verovatnoće sa statistikom.

Primitimo, na kraju, da je u uvodnom izlaganju dat kratak prikaz razvoja teorije estimacije, sa posebnim osvrtom na Gausov metod najmanjih kvadrata za parametarsku identifikaciju sistema (objavljen je u prvoj polovini 19. veka), Vinerov optimalni estimator za neparametarsku identifikaciju sistema na osnovu njegove ulazno-izlazne reprezentacije (publikovan je u prvoj polovini 20. veka) i Kalmanov optimalni estimator za estimaciju nemerljivih stanja sistema na osnovu njegovog matematičkog opisa u prostoru stanja (nastao je u drugoj polovini 20 veka). Pomenuti estimatori predstavljaju zaokruženu celinu i efikasan alat za povezivanje empirijskih podataka (merjenja) sa sistema i njegove matematičke reprezentacije. Ovim naučnim dostignućima je, po prvi put u istoriji nauke i tehnike, uspostavljena veza između inženjerske prakse i teorije, što je dovelo do daljeg razvoja inženjerske nauke, kao i same vojne i svemirske tehnologije. Komercijalizacija naprednih tehnologija rezultovala je ubrzanom industrijskom revolucijom, koja traje više od jednog veka, a trenutno se nalazi u četvrtoj fazi. Navedenu fazu karakterišu metode veštačke inteligencije i „mekog računanja“, robotika i mehatronika, računarske tehnologije i mreže, a to sve zajedno sačinjava alate za projektovanje fabrika budućnosti.

Beograd, septembar 2017. godine

Autori

# Sadržaj

## Uvod

|  |    |
|--|----|
| Kratak prikaz istorije estimacije .....                  | 1  |
| Optimalni Vinerov filter .....                           | 6  |
| Optimalni Kalmanov filter .....                          | 8  |
| Komparativna analize Vinerovog i Klamanovog filtra ..... | 10 |
| Adaptivni filtri .....                                   | 11 |
| Robustifikacija adaptivnih filtara .....                 | 13 |

## Glava 1

|   |    |
|---|----|
| Kratak prikaz klasičnog pristupa projektovanja digitalnih filtara ..... | 15 |
|---|----|

## Glava 2

|   |    |
|---|----|
| Osnovi teorije estimacije .....   | 25 |
| 2.1 Estimator najmanjih kvadrata (minimalne srednje-kvadratne greške) kada je dato merenje skalarne slučajne varijable: jednodimenzioni (skalarni ) LMS estimator .....   | 27 |
| 2.1.1 Estimator najmanjih kvadrata kao uslovno matematičko očekivanje, kada je dato skalarno merenje .....  | 27 |
| 2.1.2 Estimacija najmanjih kvadrata (LMS) skalarne slučajne varijable kada su data merenja niza slučajnih promenljivih (vektorska slučajna varijabla) .....   | 32 |
| 2.1.3 Kriterijum za ocenu kvaliteta estimacije i efikasnosti estimaora:<br>Kramer-Raova teorema .....   | 39 |
| 2.1.4 LMS estimacija u slučaju kada je dato merenje kontinualnog skalarnog slučajnog procesa: jednodimenzioni (skalarni) LMS estimator .....  | 41 |
| 2.1.5 Skalarni linearni estimator najmanjih kvadrata (LLMS) kada su data merenja skalarne slučajne varijable: Analitički pristup optimizacije MSE kriterijuma .....   | 43 |
| 2.1.6 Skalarni linearni estimator najmanjih kvadrata (LLMS) kada su data merenja niza slučajnih varijabli (diskretna merenja realnog skalarnog slučajnog procesa) .....   | 44 |
| 2.1.7 Jednodimenzioni linearni metod najmanjih kvadrata (LLMS) kada je dat skalarni slučajni signal (kontinualno merenje): analitički pristup minimizacije MSE kriterijuma .....  | 47 |
| 2.1.8 Geometrijska interpretacija principa ortogonalnosti (projekcione teoreme): algebarski pristup minimizaciji MSE kriterijuma .....  | 51 |
| 2.1.9 Skalarni linearni estimator najmanjih kvadrata (LLMS) kada su data diskretna slučajna merenja (merenja skalarnog realnog diskretnog slučajnog procesa ili vektorske slučajne varijable): geometrijski pristup ..... | 54 |
| 2.1.10 Multidimenzionalni diskretni linerarni estimator minimalne srednje kvadratne greške (najmanjih kvadrata): vektorski diskretni LLMS estimator .....   | 59 |
| 2.1.11 Skalarni linearni estimator najmanjih kvadrata (LLMS) kada su data kontinualna merenja: geometrijsko-algebarski pristup .....  | 62 |
| 2.1.12 Multidimenzioni linearni estimator najmanjih kvadrata (LLMS) kada je dat vektorski kontinualni slučajni signal (kontinualno merenje): geometrijsko algebarski pristup .....  | 63 |
| 2.2 Estimator maksimalne aposteriorne verovatnoće: MAP estimator .....  | 66 |
| 2.3 Estimator maksimalne verodostojnosti: ML estimator .....  | 69 |

|   |    |
|---|----|
| 2.4 Estimator minimalne srednje apsolutne vrednosti greške: LAV estimator ..... | 78 |
|---|----|

### Glava 3

|   |     |
|---|-----|
| Optimalni Vinerovi filtri: Neparametarska identifikacija linearnih vremenski-invarijantnih stohastičkih sistema .....                       | 81  |
| 3.1 Kontinualni Vinerov filter .....  | 82  |
| 3.1.1. Postavke problema filtracije, predikcije i interpolacije u kontinualnom vremenskom domenu .....                                      | 82  |
| 3.1.2 Inovacioni pristup projektovanju optimalnog kontinualnog Vinerovog estimatora .....   | 86  |
| 3.1.3 Postavka problema optimalne linearne kontinualne Vinerove filtracije u frekvencijskom domenu .....                                    | 96  |
| 3.2 Diskretni Vinerov filter .....  | 106 |
| 3.2.1 Postavke problema optimalne Vinerove estimacije (filtracije, predikcije i interpolacije) u vremenski diskretnom domenu .....          | 106 |
| 3.2.2 Diskretni linearni Vinerov filter sa konačnim impulsnim odzivom (svim nulama): Vinerov FIR filter .....                               | 110 |
| 3.2.3 Diskretni linearni Vinerov estimator sa beskonačnim impulsnim odzivom: Vinerov IIR estimator (prediktor, filter i interpolator) ..... | 114 |
| 3.2.4 Diskretni Vinerov filter za široko-stacionarne vektorske signale .....  | 127 |
| 3.2.5 Diskretni Vinerov filter za nestacionarne vektorske signale .....   | 128 |

### Glava 4

|  |     |
|--|-----|
| Optimalni Kalmanov filter: Estimator stanja stohastičkih signala i sistema .....   | 135 |
| 4.1 Diskretni Kalmanov filter .....  | 135 |
| 4.1.1 Postavka problema diskretne Kalmanove filtracije u prostoru stanja .....   | 135 |
| 4.1.2 Prediktor-korektor strukture diskretnog Kalmanovog filtra .....  | 136 |
| 4.1.3 Kriterijum za ocenu kvaliteta estimatora: nepomerčnost i minimalna varijansa greške estimacije (optimalni estimator minimalne varijanse greške) .....      | 138 |
| 4.1.4 Heuristička analiza rada diskretnog Kalmanovog filtra .....  | 142 |
| 4.1.5 Inicijalizacija i implementiranje diskretnog Kalmanovog filtra .....   | 144 |
| 4.1.6 Geometrijski princip ortogonalnosti .....  | 152 |
| 4.1.7 Asimptotske osobine diskretnog Kalmanovog filtra: diskretna Rikatijeva jednačina .....   | 154 |
| 4.1.8 Kalmanov filter kao observer stanja linearnog diskretnog dinamičkog sistema .....  | 158 |
| 4.1.9 Kratak pregled osnovnih osobina Kalmanovog estimatora .....  | 164 |
| 4.2 Kontinualni Kalmanov filter: Optimalni estimator stanja kontinualnih stohastičkih modela signala i sistema u prostoru stanja .....                           | 166 |
| 4.2.1 Postavka problema filtracije (estimacije) u prostoru stanja .....  | 166 |
| 4.2.2 Trajektorija linearnog kontinualnog sistema u prostoru stanja: metod varijacije parametara .....   | 169 |
| 4.2.3 Diskretizacija linearnog kontinualnog modela u prostoru stanja .....   | 174 |
| 4.2.4 Kontinualni Kalmanov filter: Estimator stanja stohastičkih modela sistema i signala u prostoru stanja .....  | 178 |
| 4.3 Robusni i adaptivni Kalmanovi filtri: estimacija stanja stohastičkih modela signala i sistema u uslovima nepoznavanja statističkih karakteristika šuma ..... | 193 |
| 4.3.1 Postavka problema robusne filtracije stohastičkih signala .....  | 193 |
| 4.3.2 Kratak prikaz koncepta M-robusne estimacije .....  | 198 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.3.3 Robusni Kalmanovi filtri zasnovani na konceptu M-robustne estimacije i metodu stohastičke aproksimacije: M-robustni Kalmanovi filtri tipa stohastičke aproksimacije .....                                   | 207 |
| 4.3.4 Adaptivni M-robustni Kalmanovi filtri tipa stohastičke aproksimacije .....  | 217 |
| <b>Glava 5</b>  |     |
| Adaptivno filtriranje: Parametarska identifikacija diskretnih stohastičkih sistema .....  | 231 |
| 5.1 Uvod .....  | 231 |
| 5.2 Strukture digitalnih filtara .....  | 231 |
| 5.2.1 Filtri sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR filtri) .....  | 232 |
| 5.2.2 Filtri sa konačnim impulsnim odzivom (FIR filtri) .....   | 234 |
| 5.3 Kriterijumska funkcija za estimaciju parametara FIR filtra .....  | 236 |
| 5.3.1 Kriterijum srednje kvadratne greške (rizika) – MSE kriterijum .....   | 237 |
| 5.3.2. Minimizacija kriterijuma srednje kvadratne greške (rizika) .....   | 239 |
| 5.3.2.1 Njutnova metoda .....   | 241 |
| 5.3.2.2 Metoda najbržeg spusta .....  | 243 |
| 5.4 Adaptivni algoritmi za estimaciju parametara FIR filtara .....  | 245 |
| 5.4.1 Algoritam minimalnih srednje-kvadratnih vrednosti (LMS algoritam) .....   | 245 |
| 5.4.2 Algoritam najmanjih kvadrata (LS algoritam) .....   | 247 |
| 5.4.3 Rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata (RLS algoritam) .....   | 249 |
| 5.4.4 Rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata sa eksponencijalnim faktorom zaboravljanja (WRLS algoritam) .....   | 252 |
| 5.5 Adaptivni algoritmi za estimaciju parametara IIR filtara .....  | 258 |
| 5.5.1 Rekurzivni algoritam greške predikcije (RPE algoritam) .....  | 265 |
| 5.5.2 Algoritam pesudo-linearne regresije (PLR algoritam) .....   | 270 |
| <b>Glava 6</b>  |     |
| Adaptivni digitalni filtri sa promenljivim faktorom zaboravljanja: Estimacija vremenski promenljivih parametara diskretnih stohastičkih sistema.....  | 275 |
| 6.1 Izbor promenljivog faktora zaboravljanja .....  | 275 |
| 6.1.1 Izbor faktora zaboravljanja na osnovu proširene greške predikcije .....   | 276 |
| 6.1.2 Fortescue-Kershenbaum-Ydstie algoritam (FKY algoritam) .....  | 278 |
| 6.1.3 Algoritam paralelne adaptacije (PA-RLS algoritam) .....   | 286 |
| 6.1.4 Generalisani algoritam otežinjenih najmanjih kvadrata sa promenljivim faktorom zaboravljanja .....  | 293 |
| 6.1.5 Izbor promenljivog faktora zaporavljanja na osnovu modifikovanog generalizovanog algoritma maksimalne verodostojnosti: MGLR algoritam .....   | 296 |
| 6.2 Eksperimentalna analiza.....  | 303 |
| 6.2.1 Komparativna analiza rekurzivnih algoritama za estimaciju promenljivog faktora zaboravljanja (analiza RLS algoritma sa PGP, FKY i PA strategijom za izračunavanje promenljivog faktora zaboravljanja) ..... | 303 |
| <b>Glava 7</b>  |     |
| Adaptivni digitalni filtri sa povećanom brzinom konvergencije: Optimalno planiranje pobudnog signala .....  | 306 |
| 7.1 Definisane problema parametarske identifikacije .....   | 307 |
| 7.2 Adaptivni filtri konačnog impulsnog odziva sa optimalnim ulazom .....   | 308 |
| 7.3 Analiza konvergencije adaptivnih algoritama .....   | 312 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.4 Primena rekurzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa optimalnim ulazom kod potiskivanja lokalnog eha u sistemima za skremblovanje ..... | 328 |
| 7.4.1 Definisavanje problema potiskivanja lokalnog eha u sistemima za skremblovanje ...  | 328 |
| 7.4.2 Eksperimentalna analiza .....  | 330 |
| 7.5 Primena promenljivog faktora zaboravljanja na adaptivne filtre konačnog impulsnog odziva sa optimalnim ulazom.....                     | 335 |

## Glava 8

|  |     |
|--|-----|
| Robustifikacija adaptivnih digitalnih filtara: Parametarska identifikacija u približno poznatom stohastičkom okruženju .....                         | 347 |
| 8.1 Robusni algoritam minimalne srednje-kvadratne greške: robusni LMS algoritam .....  | 349 |
| 8.1.1 Robustifikacija algoritma minimalne srednje-kvadratne greške: robusni LMS algoritam (RLMS algoritam) .....                                     | 351 |
| 8.1.2 Analiza stabilnosti robusnih estimatora.....   | 355 |
| 8.1.3 Eksperimentalna analiza na osnovu simulacija .....   | 357 |
| 8.2 Robusni rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata sa optimalnim ulazom .....   | 363 |
| 8.2.1 Eksperimentalna analiza .....  | 368 |
| 8.3 Adaptivna procena faktora skaliranja kod robusnih algoritama.....  | 370 |
| 8.3.1 Eksperimentalna analiza .....  | 378 |
| 8.4 Robusni rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata sa promenljivim faktorom zaboravljanja i detekcijom impulsnih smetnji .....                      | 382 |
| 8.4.1 Eksperimentalna analiza .....  | 386 |
| 8.5 Rekurzivni robusni algoritam ponderisanih najmanjih kvadrata sa paralelnom robusnom adaptacijom faktora skaliranja I faktora zaboravljanja ..... | 388 |
| 8.5.1 Rekurzivna robusna estimacija parametara na bazi kriterijuma ponderisanih (težinskih) najmanjih kvadrata.....                                  | 389 |
| 8.5.2 Rekurzivna robusna estimacija faktora skaliranja (nepoznate standardne devijacije šuma) .....  | 393 |
| 8.5.3 Izbor promenljivog faktora zaboravljanja na osnovu robustifikovane modifikovane proširene greške predikcije (M-robusni MPPG algoritam).....    | 397 |
| 8.5.4 Eksperimentalna analiza .....  | 403 |

## Glava 9

|  |     |
|--|-----|
| Primene adaptivnih robusnih digitalnih filtara za potiskivanje eha u telekomunikacionim mrežama:.....              | 415 |
| 9.1 Eho-uzroci i načini nastanka .....   | 417 |
| 9.1.1 Eho kod prenosa govora.....  | 417 |
| 9.1.2. Akustički eho .....   | 419 |
| 9.1.3 Eho kod prenosa podataka.....  | 420 |
| 9.1.4 Osnovi principi adaptivnog potiskivanja eha .....  | 421 |
| 9.2 Matematički model sistema za potiskivanje eha .....  | 423 |
| 9.3 Analiza uticaja pobudnog signala na performanse sistema za potiskivanje eha kod prenosa govornog signala ..... | 424 |
| <b>Literatura</b> .....  | 431 |
| <b>Lista skraćenica</b> .....  | 439 |
| <b>Indeks</b> .....  | 441 |



# Spisak slika

|   |     |
|---|-----|
| Slika 1. Blok šema Vinerovog filtra (estimatora) .....  | 6   |
| Slika 2. Blok dijagram Kalmanovog estimatora (filtra) .....   | 9   |
| Slika 3. Teorijski osnovi Kalmanove filtracije .....  | 10  |
| Slika 4. Blok šema adaptivnog filtra .....  | 12  |
| Slika 1.1 Specifikacija željene amplitudsko-frekvencijske karakteristike NF filtra .....  | 16  |
| Slika 1.2 Zadovoljavajuća amplitudsko-frekvencijska karakteristika NF filtra.....   | 17  |
| Slika 1.3 Amplitudsko-frekvencijske karakteristike Butterworth-ovih filtara reda $N=2, 4$ i $8$ ..  | 18  |
| Slika 1.4 Tipičan grafik kvadrata Chebyshev-ljeve funkcije .....  | 20  |
| Slika 1.5 Postupak određivanja polova Chebyshev-ljevog filtra prvog tipa, četvrtog reda.....  | 21  |
| Slika 2.1 Blok šema postupka estimacije .....   | 25  |
| Slika 2.2 Mogući izgled funkcije gubtaka ili rizika u kriterijumu optimalnosti .....  | 26  |
| Slika 2.3 Geometrijski prikaz principa ortogonalnosti (analogno sa linearnom algebram) .....  | 42  |
| Slika 2.4 Postupak diskretizacije kontinualnog signala .....  | 48  |
| Slika 2.5 Geometrijski princip ortogonalnosti; šematski prikaz .....  | 52  |
| Slika 2.6 Uslovna f.g.v. ....   | 73  |
| Slika 3.1 Blok šema optimalng Vinerovog estimatora .....  | 82  |
| Slika 3.2 Dvokoračni inovacioni postupak za sintezu optimalnog kontinualnog Vinerovog estimatora .....  | 86  |
| Slika 3.3 Transformacija spektra signala.....   | 88  |
| Slika 3.4 Konverzija korelisanog slučajnog procesa u beli šum primenom inverznog filtra.....  | 88  |
| Slika 3.5 Blok šema optimalnog Vinerovog estimatora .....   | 90  |
| Slika 3.6 Blok šema Vinerovog filtra u kompleksnom domenu .....   | 94  |
| Slika 3.7 MSE –kriterijum u funkciji parametra $\varepsilon$ za različite fiksne vrednosti parametra $\eta$ funkcije prenosa.....                                       | 97  |
| Slika 3.8 Blok šema Vinerovog linearnog estimatora za procenu odbiraka vremenski diskretnog signala $\{x(i)\}$ na bazi diskretnih merenja $\{y(i)\}$ .....              | 106 |
| Slika 3.9 Filter za bojenje (korelisanje) belog šuma i inverzni filter za beljenje obojenog šuma u frekvencijskom kompleksnom domenu.....                               | 114 |
| Slika 4.1 Šematska ilustracija rada Kalmanovog filtra kao prediktor korektor algoritma u realnom vremenu (prikaz dva sukcesivna ciklusa u radu Kalmanovog filtra) ..... | 146 |
| Slika 4.2 Pomoćni modul za izračunavanje optimalnog Kalmanovog pojačanja .....  | 146 |
| Slika 4.3 Blok šema diskretnog Kalmanovog filtra kao estimatora stanja linearnih diskretnih dinamičkih stohastičkih sistema .....                                       | 155 |
| Slika 4.4 Observer stanja sistema sa promenljivim pojačanjem .....  | 162 |
| Slika 4.5 Funkcionalna šema sistema upravljanja sa Kalmanovim filtrom kao observerom stanja .....   | 164 |
| Slika 4.6 Aproksimacija kontinualnog šuma merenja .....   | 177 |
| Slika 4.7 Funkcionalni blok dijagram kontinualnog Kalmanovog filtra za model sistema.....   | 180 |
| Slika 4.8 Određivanje ekvivalentnog linearnog kontinualnog sistema, koji se pobuđuje belim šumom a na izlazu generiše obojeni šum zadate spektralne gustine snage .     | 185 |
| Slika 4.9 Kretanje tela u konstantnom gravitacionom polju .....   | 189 |

|   |     |
|---|-----|
| Slika 4.10 Strukturni blok dijagram adaptivnog robusnog Kalmanovog estimatora stanja sistema .....  | 228 |
| Slika 5.1 Struktura IIR rekurzivnog filtra .....  | 233 |
| Slika 5.2 Struktura transversalnog FIR nerekurzivnog filtra .....   | 235 |
| Slika 5.3 Struktura adaptivnog digitalnog filtra .....  | 238 |
| Slika 5.4 Izgled MSE za slučaj kad je $M=1$ .....   | 239 |
| Slika 5.5 Izgled MSE za slučaj kad je $M=2$ .....   | 240 |
| Slika 5.6 Grafički prikaz metode najbržeg spusta .....  | 244 |
| Slika 5.7 Pravci određivanja minimuma kriterijumske funkcije kod metode najbržeg spusta i Njutnove metode.....  | 244 |
| Slika 5.8 Direktna realizacija FIR filtra .....   | 248 |
| Slika 5.9 Blok šema EE IIR digitanog filtra .....   | 259 |
| Slika 5.10 Blok šema OE adaptivnog digitanog IIR filtra .....   | 261 |
| Slika 6.1 Raspored prozora analize u MGLR algoritmu .....   | 296 |
| Slika 6.2 Veza između diskriminacione funkcije MGLR algoritma i promenljivog faktora zaboravljanja .....  | 299 |
| Slika 6.3 Promena parametra $b_1$ FIR filtra reda $M=9$ u skladu sa test signalom 2.....  | 303 |
| Slika 6.4 Vrednost procenjenog parametra FIR filtra uz primenu fiksnog faktora zaboravljanja .....  | 304 |
| Slika 6.5 Estimacija vremenski promenljivog parametra FIR filtra primenom RLS algoritma sa PGP strategijom za izbor promenljivog faktora zaboravljanja.....       | 305 |
| Slika 6.6 Estimacija vremenski promenljivog parametra FIR filtra primenom RLS algoritma sa FKY strategijom za izbor promenljivog faktora zaboravljanja. ....      | 305 |
| Slika 6.7 Estimacija vremenski promenljivog parametra FIR filtra primenom RLS algoritma sa PA strategijom za izbor promenljivog faktora zaboravljanja. ....       | 306 |
| Slika 6.8 Estimacija vremenski promenljivog parametra $b_1$ (test 2) primenom RLS PGP algoritma.....  | 307 |
| Slika 6.9 Estimacija vremenski promenljivog parametra (test 2) primenom RLS FKY algoritma.....  | 308 |
| Slika 6.10 Estimacija vremenski promenljivog parametra (test 2) primenom PA RLS algoritma .....   | 308 |
| Slika 6.11 Estimacija vremenski promenljivog parametra (test 2) primenom RLS algoritma .....  | 309 |
| Slika 7.1 Opšta struktura sistema za parametarsku identifikaciju sistema .....  | 312 |
| Slika 7.2 Blok šema sistema za skremblovanje govornog signala .....   | 334 |
| Slika 7.3 Princip potiskivanja lokalnog eha za jedan pravac prenosa.....  | 335 |
| Slika 7.4 Normalizovana greška estimacije (NEE) za beli Gausov šum pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=9$ .....     | 336 |
| Slika 7.5 ERLE faktor za beli Gausov šum, pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=9$ .....                              | 337 |
| Slika 7.6 Normalizovana greška estimacije (NEE) za beli Gausov šum, pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=256$ .....  | 338 |
| Slika 7.7 ERLE faktor za beli Gausov šum, pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=256$ .....                            | 338 |
| Slika 7.8 Normalizovana greška estimacije (NEE) za beli Gausov šum, pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=1000$ ..... | 339 |

|   |     |
|---|-----|
| Slika 7.9 ERLE faktor za beli Gausov šum, pseudo-slučajnu binarnu sekvencu i optimalnu ulaznu sekvencu za red FIR filtra $M=1000$ .....   | 339 |
| Slika 7.10 Normalizovana greška estimacije (SNR =10 dB) za izbor VFF primenom PA-RLS algoritma sa pobudnim signalom: Gausov šum i optimalna ulazna sekvenca .....                               | 343 |
| Slika 7.11 Normalizovana greška estimacije (SNR =20 dB) za izbor VFF primenom PA-RLS algoritma sa pobudnim signalom: Gausov šum i optimalna ulazna sekvenca .....                               | 344 |
| Slika 7.12 Normalizovana greška estimacije (SNR =30dB) za izbor VFF primenom PA-RLS algoritma sa pobudnim signalom: Gausov šum i optimalna ulazna sekvenca .....                                | 345 |
| Slika 8.1 Blok šema opšte strukture za parametarsku identifikaciju sistema (model sistema je poznat sa tačnošću do nepoznatog vektora parametara) .....   | 349 |
| Slika 8.2 Oblik $\Psi$ funkcije za različite estimatore .....   | 354 |
| Slika 8.3 Log normalizovana greška estimacije za različite algoritme u prisustvu Gausovog šuma .....  | 359 |
| Slika 8.4 Log normalizovana greška estimacije za različite algoritme u prisustvu impulsnog šuma .....   | 360 |
| Slika 8.5 Usrednjena log normalizovana greška estimacije za različite verovatnoće računata na osnovu 100 Monte Karlo pokušaja .....   | 360 |
| Slika 8.6 Aditivni impulsni šum na izlazu željenog sistema .....  | 369 |
| Slika 8.7 Normalizovana greška estimacije (NEE) za različite adaptivne algoritme u slučaju kada u željenom odzivu nije prisutan impulsni šum .....  | 369 |
| Slika 8.8 Normalizovana greška estimacije (NEE) za različite adaptivne algoritme u slučaju kada je u željenom odzivu prisutan impulsni šum .....  | 369 |
| Slika 8.9 Aditivni šum promenljive dinamike: a) bez prisustva impulsnih smetnji b) uz prisustvo impulsnih smetnji .....   | 378 |
| Slika 8.10 Procena faktora skaliranja: a) primenom medijane apsolutne devijacije b) iterativnom metodom .....   | 379 |
| Slika 8.11 Normalizovana greška estimacije kada u aditivnom šumu nisu prisutane impulsne smetnje .....  | 380 |
| Slika 8.12 Normalizovana greška estimacije kada su u aditivnom šumu prisutane impulsne smetnje .....  | 381 |
| Slika 8.13 Estimacija vremenski promenljivog parametra primenom RRLS algoritma sa promenljivim faktorom zaboravljanja i detektorom „outlier“-a kada nije prisutna impulsna kontaminacija: ..... | 386 |
| Slika 8.14 Promena parametra $b_1$ FIR filtra reda $M=9$ .....  | 387 |
| Slika 8.15 Estimacija vremenski promenljivog parametra primenom RRLS algoritma sa promenljivim faktorom zaboravljanja i detektorom „outlier“-a kada je prisutna impulsna kontaminacija: .....   | 387 |
| Slika 8.16 Trajektorija vremenski promenljivog parametra, .....   | 407 |
| Slika 8.17 Realizacija aditivnog šuma sa nultom srednjom vrednošću, : .....   | 408 |
| Slika 8.18 Eksperimentalni rezultati za RRWLSV algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti .....  | 408 |
| Slika 8.19 Eksperimentalni rezultati za RLSVF algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti .....   | 409 |
| Slika 8.20 Eksperimentalni rezultati za RRLSS algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti .....   | 409 |
| Slika 8.21 Eksperimentalni rezultati za RRWLSV algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti kontaminiran „outlier“-ima .....   | 410 |

|  |     |
|--|-----|
| Slika 8.22 Eksperimentalni rezultati za RLSVF algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti kontaminiran „outlier“-ima .....   | 410 |
| Slika 8.23 Eksperimentalni rezultati za RRLSS algoritam kada je nominalni šum gausovski nulte srednje vrednosti kontaminiran „outlier“-ima .....   | 411 |
| Slika 8.24 Realizacija aditivnog šuma .....  | 411 |
| Slika 8.25 Trajektorija vremenski promenljivog parametra .....   | 412 |
| Slika 8.26 Normalizovana greška estimacije (NEE), za različite algoritme, u nestacionarnom okruženju sa Gausovskim šumom nulte srednje vrednosti i vremenski promenljivim parametrom .....                                   | 412 |
| Slika 8.27 Normalizovana greška estimacije (NEE), za različite algoritme, u nestacionarnom okruženju sa Gausovskim šumom nulte srednje vrednosti koji je kontaminiran „outlier“-ima i vremenski promenljivim parametrom..... | 413 |
| Slika 9.1 Nastanak eha u analognoj telefonskoj mreži pri prenosu govornog signala .....  | 418 |
| Slika 9.2 Nastanak akustičkog eha. Akustički eho je posledica kratkog spajanja između zvučnika i mikrofona, usled refleksije od okolnih predmeta .....   | 419 |
| Slika 9.3 Blok šema potpunog dvosmernog prenosa (“full-duplex”) na jednomvodu realizovanog pomoću hibrida. Signali eha su obeleženi isprekidanim linijama .....  | 420 |
| Slika 9.4 Adaptivno potiskivanje akustičkog eha .....  | 421 |
| Slika 9.5 Adaptivno potiskivanje eha (APE) za oba pravca prenosa govornog signala .....  | 422 |
| Slika 9.6 Adaptivno potiskivanje lokalnog i linijskog eha .....  | 422 |
| Slika 9.7 Blok šema sistema za adaptivno potiskivanje eha .....  | 424 |
| Slika 9.8 ERLE faktor kada se prenosni put signala eha simulira sa FIR filtrom .....   | 427 |
| Slika 9.9 ERLE faktor kada se prenosni put signala eha simulira IIR filtrom tipa Butterworth .....   | 427 |
| Slika 9.10 ERLE faktor kada se prenosni put signala eha simulira IIR filtrom tipa Chebyshev .....  | 428 |

# Spisak tabela

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1.1 Preslikavanje funkcije prenosa NF filtra u funkciju prenosa željenog tipa filtra ....  | 23  |
| Tabela 4.1 Heuristički opis funkcionisanja Kalmanovog Filtra .....  | 143 |
| Tabela 4.2 Dijagram toka algoritma digitalne Kalmanove filtracije .....   | 145 |
| Tabela 4.3 Dijagram toka Kalmanovog observera stanja linearnih diskretnih vremenski-invarijantnih sistema .....   | 161 |
| Tabela 4.4 Linearni kontinualni model i ekvivalentni linearni diskretni model u prostoru stanja .....   | 177 |
| Tabela 4.5 Jednačine kontinualnog Kalmanovog filtra .....   | 181 |
| Tabela 4.6 Proračun diskretnog Kalmanovog filtra za praćenje objekta u prostoru.....  | 193 |
| Tabela 4.7 Dijagram toka algoritma M-robustne digitalne Kalmanove filtracije tipa stohstičke aproksimacije .....  | 215 |
| Tabela 4.8 Dijagram toka procedure za implementaciju adaptivnog M-robustnog Kalmanovog filtra.....  | 223 |
| Tabela 5.1 Dijagram toka RLS algoritma .....  | 252 |
| Tabela 5.2 Dijagram toka WRLS algoritma .....   | 257 |
| Tabela 5.3 Dijagram toka EE-WRLS algoritma .....  | 265 |
| Tabela 5.4 Dijagram toka RPE algortima .....  | 269 |
| Tabela 5.5 Dijagram toka PLR algoritma.....   | 271 |
| Tabela 6.1 Određivanje faktora zaboravljanja FKY strategijom .....  | 282 |
| Tabela 6.2 Određivanje faktora zaboravljanja PA strategijom.....  | 292 |
| Tabela 7.1 Vrednost usrednjene normalizovene greške estimacije za beli Gausov šum i optimalnu ulaznu sekvencu (SNR=10 dB).....                                | 342 |
| Tabela 7.2 Vrednost usrednjene normalizovene greške estimacije za beli Gausov šum i optimalnu ulaznu sekvencu (SNR=20 dB).....                                | 343 |
| Tabela 7.3 Vrednost usrednjene normalizovene greške estimacije za beli Gausov šum i optimalnu ulaznu sekvencu (SNR=30dB).....                                 | 344 |
| Tabela 8.1 Dijagram toka RLMS algoritma .....   | 354 |
| Tabela 8.2 Usrednjena log normalizovana greška estimacije za različite verovatnoće računata na osnovu of 100 Monte Karlo pokušaja .....                       | 361 |
| Tabela 8.3 Usrednjena log normalizovana greška estimacije za različite vrednosti inteziteta impulsnog šuma, računata na osnovu 100 Monte Karlo pokušaja ..... | 361 |
| Tabela 8.4 Usrednjena log normalizovana greška estimacije za različite vrednosti raspodele amplitude računata na osnovu 100 Monte Karlo pokušaja .....        | 361 |
| Tabela 8.5 Dijagram toka RRLS algoritma.....  | 365 |
| Tabela 8.6 Dijagram toka RRLSO algoritma .....  | 366 |
| Tabela 8.7 Dijagram toka algoritma za istovremnu estimaciju parametara i faktora skaliranja .....   | 377 |
| Tabela 8.8 Varijansa procene faktora skaliraja:<br>a) primenom medijane apsolutne devijacije b) iterativnom metodom .....                                     | 380 |
| Tabela 8.9 Dijagram toka RRLS algoritma sa promenljivim faktorom zaboravljanja i detekcijom impulsnih smetnji .....   | 384 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 8.10 Dijagram toka rekurzivnog robusnog algoritma ponderisanih najmanjih kvadrata sa robusnim adaptivnim faktorom skaliranja i faktorom zaboravljanja ..... | 400 |
| Tabela 8.11 Srednja vrednost i varijansa uzorka za različite stepene kontaminacije .....   | 406 |
| Tabela 8.12 Srednja vrednost i varijansa uzorka za različite intenzitete „outlier“-a, .....  | 406 |
| Tabela 8.13 Srednje kvadratna norma matrice kovarijanse greške estimacije za različite početne uslove .....  | 407 |
| Tabela 9.1 Karakteristike RLS i LMS adaptivnih algoritama .....  | 429 |

# Uvod

U opštem slučaju pojam „filter“ podrazumeva fizički uređaj čiji je zadatak da ukloni neželjene sastojke iz odgovarajuće mešavine. U originalnoj definiciji filter je fizički sklop koji rešava problem izdvajanja neželjenih komponenti iz mešavine koja se sastoji od gasa, tečnosti i čvrste faze. Kasnije, u eri elektronskih cevi i analogne elektronike ovaj termin je označavao analogno kolo koje filtrira elektronske signale. Ovakvi signali predstavljali su mešavine komponenti (harmonika) na različitim frekvencijama, te je ovaj fizički (elektronski) sklop potiskivao neželjene frekvencije. Ovaj koncept je proširen krajem prve polovine 20. veka na izdvajanje korisnog signala iz zašumljene sredine, pri čemu su i signal i šum opisani stohastički preko odgovarajućih spektralnih gustina snage i njima pridruženih kovarijacionih funkcija. Međutim, pre početka uvodnog izlaganja razmotrimo ukratko osnovne momente u razvoju teorije estimacije.

## Kratak prikaz istorije estimacije

Neizbežnost postojanja grešaka prilikom merenja fizičkih veličina uočeno je još u doba Galileja Galileja (*Galileo Galilei*, 1564-1642). Međutim, prvi formalni matematički metod za tretiranje ovakvih grešaka predložio je tek 1795. godine Karl Fridrih Gaus (*Carl Friedrich Gauss*, 1777-1855). Iako se ovaj metod, koji je nazvan metod najmanjih kvadrata (u engleskoj literaturi *Method of Least Squares*) pretežno koristi za optimalno rešavanje problema linearne estimacije, Gaus je primenio ovaj metod za rešavanje, sa matematičkog stanovišta, nelinearnog problema estimacije u okviru astronomije. Ovaj događaj je obrađen na više mesta u literaturi i ukratko se može prikazati na sledeći način. Prvog dana 19. veka, 01.01.1801. godine, italijanski astronom *Giuseppe Piazzi* proučavao je astronomski katalog zvezda, neznavši da je katalog odštampan sa greškom. Pokušavajući da pronađe nedostajuću zvezdu u katalogu, otkrio je novu planetu, koju je kasnije nazvao Ceres, a da nije bio ni svestan svog otkrića. Narednu 41 noć pratio je kretanje planete iz observatorije u Palermu, nakon čega je prekinuo eksperiment. Međutim, kada je nakon izvesnog vremena nastavio eksperiment, više nije mogao da pronađe nebesko telo. O svom otkriću je 24.01.1801. godine pismenim putem obavestio Johana Boda (*Johan Bode*), koji je bio poznat po Bodeovom zakonu, na osnovu koga se moglo proračunati, u astronomskim jedinicama, rastojanje planete od Sunca, na osnovu formule