

Антоније Р. Ђорђевић

# **ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА**

Академска мисао  
Универзитет у Београду  
Електротехнички факултет  
Београд, 2012.

Антоније Р. Ђорђевић

## ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА

Друго издање

*Рецензенти*

Др Бранко Колунџија  
Др Владимир Петровић

*Издавач*

АКАДЕМСКА МИСАО  
Бул. краља Александра 73, Београд

*Дизајн корица*

Милица Ђурић-Јовичић, дипл. инж.

*Штампа*

Академска мисао, Београд

*Тираж*

200 примерака

ISBN 978-86-7466-436-0

---

**НАПОМЕНА:** Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге - у целини или у деловима - није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења аутора и издавача.

---

## *Предговор*

Класична теорија електромагнетских поља (електромагнетика) релативно је стара област, али представља основу за велики део савремене електротехничке струке. У тој теорији се полази од резултата неколико основних експеримената, одакле су изведене основне једначине електромагнетских поља. Надградња ових једначина је читав низ других једначина и теорема, као и примера у којима се електромагнетско поље може одредити егзактно. Већ самим тим, теорија електромагнетских поља сачињава део опште културе сваког инжењера електротехнике. Класична теорија електромагнетских поља је макроскопска, не залази у физику елементарних честица, али, упркос томе, у већини случајева представља солидну основу за решавање инжењерских проблема.

Из теорије електромагнетских поља могу се, уз извесне апроксимације, извести основне једначине теорије електричних кола. Ова теорија је много ближа свакодневној инжењерској пракси од електромагнетике. Међутим, у учињеним апроксимацијама крију се замке које доводе до тога да се као резултат реализације пројектованог кола добијају неочекивани резултати: изобличење сигнала, преслушавање, ометање других кола, осетљивост кола на спољашње сметње, нежељено самоосциловање, па чак и безнадежно неупотребљиво коло. У таквим ситуацијама, које постају све чешће због примене све бржих аналогних и дигиталних компоненти, као и њиховог све гушћег паковања, теорија електромагнетских поља може помоћи да се открију узроци проблема и отклоне потешкоће. То, међутим, захтева овладавање резонима теорије електромагнетских поља, што у појединим ситуацијама доводи до сасвим другачијег угла гледања на електротехнику.

Поједине области електротехнике се директно ослањају на теорију електромагнетских поља. Најбољи примери су микроталасна и оптоелектронска техника. У новије време пројектовање и реализација дигиталних кола (рачунарског хардвера) морају укључити анализу електромагнетских поља. Том анализом се решавају проблеми преноса сигнала између интегрисаних кола, као и у оквиру самих кола, и смањују нежељена преслушавања између кола. Осим тога, обезбеђује се да уређај испуњава строге захтеве у погледу стварања електромагнетских сметњи у својој околини, али и омогућава поуздан рад уређаја у присуству сметњи које потичу од других извора.

Аналитичким поступцима могу се решити само једноставнији електромагнетски проблеми, али се из тих решења може стећи представа о основним особинама поља. Пуна вредност теорије електромагнетских поља долази до изражаја тек захваљујући нумеричким методима анализе поља, за чију су реализацију потребни рачунари. Нумерички методи омогућавају анализу релативно сложених система, чиме се, без посезања за деликатним мерењима на физичким моделима, може „завирити“ у сваки делић поља и тиме сагледати понашање реалног система. Корак даље је прави инжењерски циљ – пројектовање кола, уређаја и система користећи се нумеричком симулацијом. Тај циљ се обично остварује оптимизационим поступком: систематски се

мењају параметри посматраног кола, уређаја или система, уз сукцесивне анализе поља, тежећи да се остваре жељене особине. Иако постоје различити комерцијални пакети рачунарских програма за овакво пројектовање, успешно коришћење тих пакета захтева добро познавање теорије електромагнетских поља.

Ова књига је настала ревизијом и допуњавањем уџбеника „Електромагнетика за Рачунарску технику“, чије је прво издање објављено 1992. године, као и на основу материјала за предавања из Електромагнетике која је аутор више година држао на Електротехничком факултету Универзитета у Београду и у његовим одељењима. Нови уџбеник је намењен студентима који слушају предмете под заједничким називом „Електромагнетика“ на основним студијама на свим одсецима Електротехничког факултета. Уџбеник покрива већину наставних јединица предвиђених важећим наставним програмима. У тежњи да што више покрије разнородне програме свих предмета, уџбеник неминовно садржи и градиво које се не предаје на свим тим предметима.

За овладавање основима обимне и сложене теорије електромагнетских поља стоји на располагању само један семестар. Стога су у књизи ригорозна извођења сведена на минимум, а тежиште излагања је посвећено томе да читалац овлада резонима теорије електромагнетских поља. Упркос упрошћавањима, изложено градиво је обимно и његово савладавање захтева добру концентрацију и систематски рад. Аутор се, ипак, нада да ће читаоци прихватити Електромагнетику као неопходну алатку за свој будући рад.

Читаоци који би желели да продубе своје знање из теорије електромагнетских поља, поред обиља стране литературе, могу да користе два одлична, мада стара уџбеника из ове области на српском језику. Аутор једног уџбеника је академик проф. др Јован Сурутка, а другог академик проф. др Бранко Поповић.

Предмет Електромагнетика се у извесној мери ослања на неколико предмета који се предају на првој и другој години основних студија: пре свега на Основе електротехнике 1 и 2 (посебно на делове у коме се изучава електромагнетско поље), а затим на Математику 3 (посебно на векторску анализу) и Теорију електричних кола (посебно на водове). Солидно знање из ових предмета помоћи ће читаоцу да лако савлада градиво Електромагнетике.

Аутор се захваљује редовним професорима др инж. Момчилу Драговићу и др инж. Бранку Колунџији, ванредним професорима др инж. Владимиру Петровићу и др инж. Дејану Тошићу, доценту др инж. Марији Николић и асистенту-приправнику мр инж. Драгану Олћану на корисним примедбама и сугестијама. Аутор се такође захваљује дипл. инж. Александри Стековић на стрпљивој и педантној техничкој обради рукописа и дипл. инж. Милицы Ђурић-Јовичић на графичкој обради књиге.

Аутор је свестан да у овом тексту постоје разни недостаци и биће захвалан свима који му укажу на њих.

# Садржај

	Страна
1. Увод.....	1
2. Електростатичко поље.....	4
2.1. Увод.....	4
2.2. Електростатичко поље у вакууму.....	4
2.2.1. Кулонов закон и вектор јачине електричног поља.....	4
2.2.2. Потенцијал.....	7
2.2.3. Основне једначине електростатичког поља у вакууму.....	8
2.2.4. Пуасонова и Лапласова једначина.....	10
2.2.5. Електростатички диполи.....	10
2.3. Проводници у електростатичком пољу.....	13
2.3.1. Теорема ликова.....	14
2.4. Електростатичко поље у присуству диелектрика.....	15
2.4.1. Поларизација диелектрика.....	15
2.4.2. Везана наелектрисања.....	15
2.4.3. Вектор електричне индукције.....	16
2.4.4. Гранични услови.....	18
2.4.5. Расподела везаних наелектрисања у линеарном диелектрику.....	19
2.4.6. Решавање проблема са диелектрицима.....	19
2.5. Капацитивности.....	20
2.6. Енергија електричног поља.....	24
2.6.1. Теореме.....	25
2.7. Технички значај електростатике.....	30
Питања и задаци.....	32
3. Стационарно поље.....	36
3.1. Увод.....	36
3.2. Стационарно струјно поље.....	36
3.2.1. Увод.....	36
3.2.2. Густина струје.....	37
3.2.3. Џулови губици.....	39
3.2.4. Побудне струје и побудно поље.....	39
3.2.5. Једначина континуитета.....	39
3.2.6. Гранични услови.....	41
3.2.7. Расподела наелектрисања у стационарном пољу.....	41
3.2.8. Аналогија између стационарног струјног поља и електростатичког поља.....	42
3.2.9. Водови са губицима.....	44
3.2.10. Тачкасти струјни извор.....	46
3.2.11. Теорема ликова.....	46
3.2.12. Уземљивачи.....	47
3.3. Стационарно магнетско поље.....	50

3.3.1. Увод.....	50
3.3.2. Магнетска индукција и Био-Саваров закон .....	50
3.3.3. Магнетски вектор-потенцијал.....	52
3.3.4. Основне једначине магнетског поља у вакууму .....	53
3.3.5. Магнетски дипол.....	55
3.3.6. Феромагнетици у магнетском пољу .....	57
3.3.7. Амперове струје .....	58
3.3.8. Вектор јачине магнетског поља .....	59
3.3.9. Гранични услови .....	60
3.3.10. Теорема ликова .....	60
3.4. Технички значај стационарних поља .....	61
Питања и задаци .....	64
4. Квазистационарно поље .....	66
4.1. Увод.....	66
4.2. Основне једначине квазистационарних поља.....	67
4.3. Индуктивности .....	71
4.4. Енергија магнетског поља.....	72
4.4.1. Теореме .....	73
4.4.2. Одређивање индуктивности преко енергије .....	75
4.5. Технички значај квазистационарних поља .....	76
Питања и задаци .....	77
5. Брзопроменљиво поље .....	80
5.1. Увод.....	80
5.2. Максвелове једначине и Лоренцови потенцијали .....	82
5.2.1. Максвелове једначине у диференцијалном облику.....	82
5.2.2. Лоренцови потенцијали.....	83
5.2.3. Максвелове једначине у интегралном облику и гранични услови.....	85
5.2.4. Једначина континуитета за жичани проводник .....	87
5.3. Комплексни вектори .....	87
5.4. Поинтингова теорема.....	92
5.5. Теорема јединствености решења Максвелових једначина .....	95
5.6. Електрична кола при високим учестаностима.....	98
5.7. Технички значај брзопроменљивих поља .....	100
Питања и задаци .....	101
6. Униформни равни електромагнетски таласи.....	104
6.1. Увод.....	104
6.2. Униформни равни таласи у савршеном диелектрику .....	105
6.3. Униформни равни таласи у средини са губицима.....	112
6.4. Одбијање и преламање униформних равних таласа .....	115
6.4.1. Одбијање од савршено проводне равни.....	115
6.4.2. Одбијање и преламање на граници две средине.....	121
6.4.3. Простирање таласа у јонизованом гасу.....	128
Питања и задаци .....	130
7. Водови.....	132
7.1. Увод.....	132
7.2. Водови са хомогеним диелектриком.....	134
7.3. Водови са нехомогеним диелектриком .....	146
7.4. Штампани водови .....	147
7.5. Фазна и групна брзина.....	151

7.6. Једначине телеграфичара .....	154
7.7. Прелазни режими на водовима .....	159
7.8. Вишепроводнички водови .....	172
Питања и задаци .....	181
8. Зрачење и антене .....	185
8.1. Увод .....	185
8.2. Херцов дипол .....	186
8.3. Магнетски дипол .....	191
8.4. Предајна антена .....	192
8.4.1. Дијаграм зрачења, усмереност и појачање .....	195
8.4.2. Антена изнад проводне равни .....	200
8.5. Пријемна антена .....	200
8.5.1. Ефективна површина .....	204
8.5.2. Фрисова формула .....	204
8.5.3. Радарски домет .....	205
8.6. Антенски низови .....	206
Питања и задаци .....	210
9. Електромагнетска компатибилност .....	213
9.1. Увод .....	213
9.2. Извори сметњи .....	214
9.3. Простирање сметњи .....	215
9.4. Дејство сметњи .....	215
9.5. Мере за испуњење електромагнетске компатибилности .....	216
Питања и задаци .....	220
10. Додатак. Елементи векторске анализе .....	225
10.1. Скаларна и векторска поља .....	225
10.2. Просторни изводи .....	226
10.2.1. Градијент .....	226
10.2.2. Дивергенција .....	229
10.2.3. Ротор .....	230
10.2.4. Набла оператор .....	232
10.2.5. Лапласијан .....	232
10.2.6. Просторни изводи у ортогоналним координатним системима .....	233
10.3. Теорема Гауса и Остроградског .....	238
10.4. Стоксова теорема .....	239
10.5. Неки идентитети векторске анализе .....	240
Питања .....	242
Литература .....	244



# 1. Увод

Цела класична теорија електромагнетских поља заснива се на четири основне једначине, познате као Максвелове једначине. У предмету Основи електротехнике 2 читалац је већ дошао до ових једначина у интегралном облику. У поглављима 2-4 ове књиге дат је поступан преглед основних чињеница и једначина теорије електромагнетских поља, оним редом како су приказани у Основима електротехнике 1 и 2 (електростатичко поље, стационарно поље и квазистационарно поље), уз извесне допуне. Једначине су при томе математички обрађене на други начин, користећи се векторском анализом, чиме се постепено уводе Максвелове једначине у диференцијалном облику.

У петом поглављу је показана противречност уопштеног Амперовог закона и једначине континуитета. Изложена је модификација уопштеног Амперовог закона којом се долази до потпуног система Максвелових једначина за временски променљива поља. На основу тих једначина, у шестом поглављу анализирају се најједноставнији електромагнетски таласи – униформни равни таласи. У том поглављу се уводе и основни појмови о таласоводима и резонаторима.

У седмом поглављу обрађено је простирање таласа дуж водова. Водови и таласоводи спадају у основне компоненте микроталасних кола, па шесто и седмо поглавље представљају увод у микроталасну технику. Посебна пажња у седмом поглављу посвећена је анализи прелазних режима, који су основ за разумевање и решавање проблема интегритета сигнала. Тај акутни проблем је присутан у пројектовању и реализацији брзих дигиталних кола и рачунарских мрежа, а односи се на остваривање таквих веза (у оквиру интегрисаних кола, на штампаним плочама, између плоча и између уређаја) које обезбеђују поуздан пренос сигнала (са што мањим изобличењем или грешкама) и уз што мање ометање околних кола. Због великих брзина дигиталних кола, спектри сигнала су веома широки, тако да задиру у микроталасну област (до десетак GHz), па су изражени ефекти преслушавања, простирања електромагнетског поља и зрачења.

У осмом поглављу изложени су основни појмови о зрачењу и антенама. Пренос сигнала посредством електромагнетских таласа (радиоталаса) битан је у савременим телекомуникацијама, бежичним рачунарским мрежама и периферијама, као и радарској

техници. За успешно решавање инжењерских задатака из ових области неопходна су основна знања о антенама, као елементима за спрегу уређаја са електромагнетским пољем.

Девето поглавље је увод у проблеме електромагнетске компатибилности, који се односе на контролисање сметњи које један уређај ствара у својој околини и на обезбеђивање поузданог рада уређаја у присуству спољашњих сметњи. Ови проблеми и поступци њиховог отклањања помињу се практично у свим поглављима, али им је у деветом поглављу посвећена посебна пажња.

Додатак на крају књиге предвиђен је као подсетник за основне појмове и релације векторске анализе.

У анализи електромагнетских поља у овом уџбенику полази се од претпоставке да су проводници и диелектрици непокретни у односу на посматрача (такозвани случај непокретних средина). Максвелове једначине за непокретне средине не укључују, на пример, динамичку електромагнетску индукцију.

Физичка суштина електромагнетског поља није ни до данас разјашњена, па под појмом тог поља подразумевамо „посебно физичко стање“ (без објашњења шта то значи) у околини наелектрисања<sup>1</sup>. Наелектрисања могу бити (у макроскопском смислу) непокретна у односу на посматрача, или се могу кретати. Наелектрисања у покрету образују струју, која може бити стационарна (независна од времена) или променљива у времену. У зависности од начина кретања наелектрисања, електромагнетско поље има различите особине. Сходно томе, поља се деле на временски константна (стационарна) и временски променљива (нестационарна).

Посебан случај стационарних поља је електростатичко поље, у коме су наелектрисања непокретна у односу на посматрача. Међутим, у општем случају стационарних поља постоје и временски константне струје. Те струје се одржавају захваљујући (временски константном) електричном пољу, које потиче од (временски константног) вишка наелектрисања, а праћене су (временски константним) магнетским пољем. Дакле, у општем случају увек постоји и електрично, и магнетско поље<sup>2</sup>.

Временски променљиве струје стварају временски променљиво електромагнетско поље. У случају да се поље споро мења, тако да се ефекти простирања електромагнетског поља могу занемарити, говори се о квазистационарном (квазистатичком) пољу. У таквом пољу нов квалитет у односу на стационарно поље је појава електромагнетске индукције. Квазистационарна поља представљају крајњи домет појава које су детаљно изучаване у Основима електротехнике 1 и 2.

У општем случају временски променљивих поља, међутим, ефекат простирања се не може занемарити. Таква поља се називају брзопроменљивим или динамичким пољима. Пример брзопроменљивих поља су електромагнетски таласи.

---

<sup>1</sup> Ни суштина наелектрисања није позната на данашњем ступњу науке.

<sup>2</sup> Поред електростатичког поља, када не постоји магнетско поље, други изузетак је магнетско поље сталних магнета, када не постоји електрично поље.