

# PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI IZ FIZIKE I MERENJA - ZA STUDENTE MAŠINSKOG FAKULTETA -

Vera Pavlović

Jelena Ilić

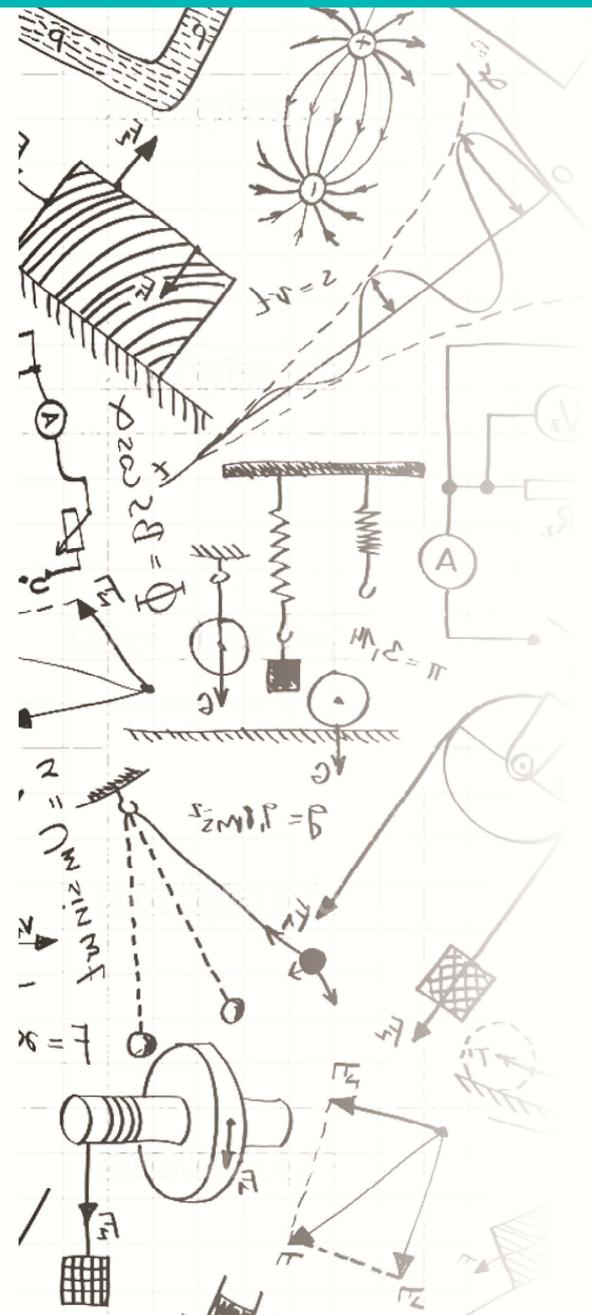
Aleksandra Vasić-Milovanović

Jasmina Jovanović

Zoran Trifković

Univerzitet u Beogradu  
Mašinski fakultet

Beograd, 2018.



## **PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI IZ FIZIKE I MERENJA**

**- ZA STUDENTE MAŠINSKOG FAKULTETA -**

II izdanje

- **Autori:**

Prof. dr Vera Pavlović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Prof. dr Jelena Ilić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Prof. dr Aleksandra Vasić-Milovanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Prof. dr Jasmina Jovanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Prof. dr Zoran Trifković, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

- **Recenzenti:**

Prof. dr Rajko Šašić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Tehnološko-metalurški fakultet

Prof. dr Jovan Cvetić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

- **Izdavač:**

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35,

tel. (+381 11) 3302-200, faks 3370-364

- **Za izdavača:**

Dekan prof. dr Radivoje Mitrović

Štampanje je odobrila Komisija za izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta u Beogradu, na osnovu odluke dekana br. 18/2018 od 19. 09. 2018.

- **Urednik:**

Prof. dr Milan R. Lečić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

- **Štampa:**

PLANETA PRINT d.o.o.

Igora Vasiljeva 33r, 11000 Beograd

tel./faks (+381 11) 6506-564

- **Kompjuterski slog:**

Autori

- **Tiraž:**

800 primeraka

ISBN 978-86-7083-990-8

© Autori i Mašinski fakultet, Beograd 2018.

Preštampavanje i fotokopiranje nije dozvoljeno. Sva prava zadržavaju autori i Mašinski fakultet.

## Predgovor

Već desetak godina se na laboratorijskim vežbama u okviru predmeta *Fizika i merenja*, na prvoj godini Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, primenjuje osavremenjeni pristup obradi rezultata merenja, u skladu sa propisima koji su sadržani u međunarodnom *Uputstvu za izražavanje merne nesigurnosti (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*. Reč je o uputstvu prikazanom u zajedničkom izdanju vodećih organizacija unutar međunarodnog metrološkog sistema. Ovi međunarodni propisi su još 1993. god. modifikovali dotadašnje klasične metode izražavanja mernih grešaka, a nakon toga su više puta dopunjavani, odnosno precizirani publikovanjem dodatnih tekstova sa konkretnim primerima, pri čemu je i danas aktuelno izdanje ovih propisa iz 2008. godine. Iako je za studente koji su slušali predmet *Fizika i merenja* tokom prethodnih nekoliko godina bio obezbeđen određeni materijal za pripremu laboratorijskih vežbi i za sprovođenje savremene obrade rezultata merenja, ipak je ostala potreba za uobličavanjem tog materijala u jedan celoviti praktikum, odnosno pomoćni udžbenik, koji daje koncizan prikaz osnovnih postavki savremene teorije merenja, a takođe daje i prikaz primene tih postavki u konkretnim primerima laboratorijskih vežbi iz onih oblasti fizike koje se planski obrađuju na prvoj godini Mašinskog fakulteta.

Nadamo se da će ovaj praktikum istinski pomoći studentima da bolje shvate i uspešnije savladaju nove pristupe u tretiranju mernih rezultata i u izražavanju merne nesigurnosti, ne samo u okviru merenja u fizici, već i šire.

Srdačno se zahvaljujemo recenzentima na svim sugestijama, a sa interesovanjem ćemo primiti i sve kritičke primedbe čitalaca, kao i nove ideje i predloge.

Autori

# SADRŽAJ

## OSNOVE MERENJA I IZRAŽAVANJA

<b>REZULTATA MERENJA</b> .....	1
• MERENJE I REZULTAT MERENJA .....	1
• NESIGURNOST MERENJA .....	1
• OSNOVE IZRAŽAVANJA NESIGURNOSTI MERENJA .....	2
• OSNOVNI POJMOVI U TEORIJI IDEALNOG I REALNOG MERENJA .....	3
• HISTOGRAM I FUNKCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE REZULTATA MERENJA .....	5
• IZRAŽAVANJE SREDNJE VREDNOSTI POPULACIJE, STANDARDNE I PROŠIRENE MERNE NESIGURNOSTI POMOĆU FUNKCIJE GUSTINE VEROVATNOĆE .....	7
- RAVNOMERNA (PRAVOUGAONA) RASPODELA .....	8
- TROUGAONA RASPODELA .....	10
- NORMALNA (GAUSOVA) RASPODELA .....	11
• DIREKTNO MERENE VELIČINE I ODGOVARAJUĆA MERNNA NESIGURNOST .....	12
• INDIREKTNO MERENE VELIČINE I ODGOVARAJUĆA MERNNA NESIGURNOST .....	13
• RELATIVNI OBLICI NESIGURNOSTI .....	16
• FAKTOR OBUHVATA KOD INDIREKTNO MERENE VELIČINE .....	16
• NALAŽENJE OPTIMALNE PRAVE METODOM NAJMANJEG ZBIRA KVADRATA ODSUPANJA .....	19
• NESIGURNOST ODREĐIVANJA KOEFICIJENTA PRAVCA OPTIMALNE PRAVE .....	20
• GRAFIČKO PRIKAZIVANJE VREDNOSTI DOBIJENIH DIREKTNIM ILI INDIREKTNIM MERENJEM NEKE FIZIČKE VELIČINE .....	21
• MERNE JEDINICE U MEĐUNARODNOM SISTEMU JEDINICA (SI) .....	23
• IZRAŽAVANJE VREDNOSTI MNOGO VEĆIH I MNOGO MANJIH OD OSNOVNE MERNE JEDINICE .....	24
• PRAVILNO ZAOKRUŽIVANJE PROŠIRENE MERNE NESIGURNOSTI I KONAČNOG REZULTATA MERENJA .....	25

<b>PRVI CIKLUS LABORATORIJSKIH VEŽBI</b> .....	27
• VEŽBA BR. 1: ODREĐIVANJE GUSTINE TEČNOSTI HIDROMETROM .....	29
• OSNOVNI PRINCIPI MERENJA PRITISKA .....	31
• VEŽBA BR. 2: ODREĐIVANJE ODNOSA $\kappa = C_p/C_v$ ZA VAZDUH .....	33
• OSNOVNE VRSTE TERMOMETARA .....	36
• VEŽBA BR. 3: ODREĐIVANJE ZAVISNOSTI TAČKE KLJUČANJA VODE OD PRITISKA .....	37
• KALORIMETAR .....	41
• VEŽBA BR. 4: ODREĐIVANJE SPECIFIČNE TOPLOTE ISPARAVANJA VODE .....	42
• VEŽBA BR. 5: ODREĐIVANJE TALASNE DUŽINE SVETLOSTI POMOĆU FRAUNHOEROVE DIFRAKCIJE .....	48
• VEŽBA BR. 6: ODREĐIVANJE RIDBERGOVE KONSTANTE .....	53
<b>DRUGI CIKLUS LABORATORIJSKIH VEŽBI</b> .....	57
• VEŽBA BR. 7: ODREĐIVANJE UBRZANJA ZEMLJINE TEŽE POMOĆU MATEMATIČKOG KLATNA .....	59
• MEHANIČKA MERILA DUŽINE .....	67
- KLJUNASTO POMIČNO MERILO (NONIJUS) .....	67
- MIKROMETARSKI ZAVRTANJ .....	68
• VEŽBA BR. 8: ODREĐIVANJE TORZIONE KONSTANTE I MODULA TORZIJE ŽICE .....	70
• VEŽBA BR. 9: ODREĐIVANJE MOMENTA INERCIJE TELA NEPRAVILNOG OBLIKA POMOĆU TORZIONOG KLATNA .....	76
• VEŽBA BR. 10: ODREĐIVANJE BRZINE ZVUKA POMOĆU KUNTOVE CEVI .....	81
• <b>LITERATURA</b> .....	85

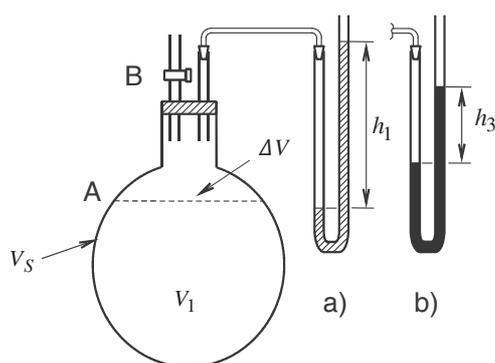
## VEŽBA BR. 2: ODREĐIVANJE ODNOSA $\kappa = C_p/C_v$ ZA VAZDUH

- Pri naglom otvaranju metalnog zatvarača boce sa gaziranim pićem (šampanjac, na primer), uočava se vodena para (magla), kondenzovana pri hlađenju zbog brzog (adijabatskog) širenja zasićene pare.
- Ručna vazдушna pumpa (za bicikl) se zagreje pri brzom sabijanju vazduha zato što se pri adijabatskom procesu deo rada sabijanja vazduha pretvara u toplotu.
- Pri ispuštanju gasa iz sprej-boce, mesto u blizini otvora isticanja gasa se usled adijabatske ekspanzije rashladi.

**Fizička pojava koja se obrađuje u vežbi:** adijabatski i izohorski procesi (termodinamički procesi).

**Napomena:** Prilikom pripreme ove vežbe treba obnoviti teoriju vezanu za osnovne termodinamičke procese, sa posebnim osvrtom na adijabatske procese.

### Opis aparature i merenja:



- A – stakleni sud zapremine  $V_S \approx 10$  l,
- B – ventil,
- M – manometar.

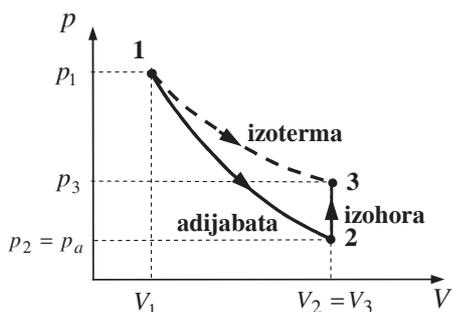
Slika 2. 1 – Šematski prikaz aparature.

Na aparaturi prikazanoj na sl. 2.1 se otvori ventil B i pomoću pumpe P poveća pritisak u sudu (balonu), tako da razlika nivoa tečnosti u manometru bude najviše desetak centimetara. Nakon toga ventil se zatvori, sačeka se nekoliko minuta da se temperatura u sudu (koja je porasla tokom pumpanja) izjednači sa temperaturom okoline. Tada se razlika nivoa tečnosti u manometru M ustali i očita se njena vrednost,  $h_1$ . Pritisak vazduha u sudu je veći od atmosferskog i iznosi:  $p_1 = p_a + \rho_z g h_1$ , gde je  $p_a$  atmosferski pritisak (slika 2.1 a).

Zatim se ventil vrlo kratko otvori (1-2 s, dok se čuje zvuk ispuštanja viška vazduha iz suda) i ponovo zatvori. Tokom otvaranja ventila, iz suda je brzo istekla manja zapremina vazduha,  $\Delta V$ , pri čemu je došlo do izjednačenja pritiska u sudu sa atmosferskim ( $p_2 = p_a$ ). Preostali vazduh u sudu, koji je pre otvaranja ventila zauzima neku zapreminu  $V_1 < V_S$ , je pri otvaranju ventila povećao svoju zapreminu na  $V_2 = V_1 + \Delta V$ , pri čemu je  $V_2 \equiv V_S$  (zapremina celog suda). Pomenuto naglo povećanje zapremine vazduha predstavlja *adijabatski proces*, pri kome, zbog brzog odvijanja procesa, nije moglo da dođe do značajnije razmene toplote gasa sa okolinom. To znači da je vazduh pri širenju

unutar suda izvršio rad adijabatskog širenja na račun svoje unutrašnje energije, pa je došlo do snižavanja temperature preostalog gasa u sudu (važi  $T_2 < T_1$ ).

Posle zatvaranja ventila, dolazi do razmene toplote između gasa u sudu i okoline, pri konstantnoj zapremini vazduha u sudu. U pitanju je *izohorsko* zagrevanje ( $V_3 = V_2 \equiv V_S$ ), prilikom koga dolazi do povećanja pritiska u sudu. Kada se temperatura vazduha u sudu izjednači sa temperaturom okoline ( $T_3 = T_1$ ) prestaje i porast pritiska, pa se ustali nova razlika visina u manometarskim cevima  $h_3$  (slika 2.1 b)). Tada je pritisak u sudu:  $p_3 = p_a + \rho_z g h_3$ . S obzirom na to da je temperatura gasa u sudu i u početnom i u krajnjem trenutku jednaka, ceo proces može da se prikaže i pomoću *izoternskog procesa* od početnog stanja ( $p_1, V_1$ ) do krajnjeg stanja ( $p_3, V_3$ ).



Slika 2. 2 – Prikaz razmatranih termodinamičkih procesa u  $p$ - $V$  dijagramu.

Procesi tokom kojih sistem prelazi iz stanja 1 u stanje 3 se mogu prikazati na  $p$ - $V$  dijagramu, kao na slici 2. 2. Jednačine koje opisuju adijabatski proces tokom vežbe i mogući izoternski proces na sl. 2.2 su:

- za adijabatsko širenje od stanja ( $p_1, V_1$ ) do stanja ( $p_a, V_2$ ):  $p_1 V_1^\kappa = p_a V_2^\kappa$ ,
- za izoternsko širenje od stanja ( $p_1, V_1$ ) do stanja ( $p_3, V_3 = V_2$ ):  $p_1 V_1 = p_3 V_3$ .

Parametar  $\kappa$  (eksponent adijabate) može da se dobije iz gornjih jednačina eliminacijom zapremina. Uz određene aproksimacije, dobija se da je:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}. \quad (2.1)$$

## Eksperimentalni rezultati

Tabela 2. 1 – Tabela za prikaz rezultata merenja

Redni broj merenja	$h_1$ (mm)	$h_3$ (mm)	$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}$	$(\kappa_i - \kappa_{sr})^2$
1				
2				
3				
4				
5				
	$h_{1,sr} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 h_{1i}$	$h_{3,sr} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 h_{3i}$	$\kappa_{sr} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \kappa_i$	$\sum_{i=1}^5 (\kappa_i - \kappa_{sr})^2$

$$\kappa_{sr} = \underline{\hspace{2cm}}$$

### Određivanje merne nesigurnosti

Pošto je  $\kappa$  određeno kao srednja vrednost na osnovu  $n = 5$  merenja, onda se može definisati standardna merna nesigurnost tipa A za  $\kappa$ :

$$u_{\kappa A} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa_i - \kappa_{sr})^2}{n(n-1)}}. \quad (2.2)$$

Direktno merene veličine su visine  $h_1$  i  $h_3$ . One se mere po jednom, za različite ostvarene početne pritiske vazduha u sudu, pa su njihove standardne merne nesigurnosti – nesigurnosti tipa B. Ove visine se mere na istom manometru sa milimetarskom podelom, pa je:  $u_{h1} = u_{h3} = u_h = \frac{U_h}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  mm.

Imajući u vidu izraz  $\kappa = h_1 / (h_1 - h_3)$  i izraz (38) iz uvodnog dela ovog praktikuma, može se konstatovati da se ukupna merna nesigurnost eksponenta adijabate može izračunati kao:

$$u_{\kappa} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa_i - \kappa_{sr})^2}{n(n-1)}} + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial h_1}\right)^2 u_{h1}^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial h_3}\right)^2 u_{h3}^2. \quad (2.3)$$

Kako je:  $\frac{\partial \kappa}{\partial h_1} = -\frac{h_3}{(h_1 - h_3)^2}$  i  $\frac{\partial \kappa}{\partial h_3} = \frac{h_1}{(h_1 - h_3)^2}$ , dobija se:  $u_{\kappa} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa_i - \kappa_{sr})^2}{n(n-1)}} + \frac{u_h^2}{(h_1 - h_3)^4} (h_3^2 + h_1^2)$ .

Pri tome je najadekvatnije da se u poslednjem izrazu uzimaju srednje vrednosti veličina  $h_1$  i  $h_3$ , pa konačni izraz za ukupnu mernu nesigurnost dobijenog eksponenta adijabate glasi<sup>9</sup>:

$$u_{\kappa} = \sqrt{u_{\kappa A}^2 + \frac{u_h^2}{(h_{1sr} - h_{3sr})^4} (h_{3sr}^2 + h_{1sr}^2)} = \sqrt{u_{\kappa A}^2 + u_{\kappa B}^2}. \quad (2.4)$$

S obzirom na broj ponovljenih merenja pri određivanju  $\kappa$ , proširenu mernu nesigurnost za  $\kappa$  možemo odrediti prema Gausovoj raspodeli. Za nivo poverenja od 99,7 % važi:

$$U_{\kappa} = 3 u_{\kappa} = \dots \quad (2.5)$$

Rezultate treba prikazati u adekvatnom konačnom zapisu<sup>10</sup>:

$$\kappa = \frac{\kappa_{sr}}{\pm U_{\kappa}} \quad (2.6)$$

<sup>9</sup> U izrazu (2.4), član pod korenom koji sadrži  $u_h^2$  se može predstaviti kao  $u_{\kappa B}^2$ , jer sadrži samo jednu standardnu mernu nesigurnost ( $u_h$ ), koja predstavlja mernu nesigurnost tipa B (ne određuje se statističkom metodom).

<sup>10</sup> Iako je teorijska vrednost koeficijenta  $\kappa$  za vazduh (dvoatomni gas) 1,4 u vežbi će se najverovatnije dobijati nešto niže vrednosti. Sistematsko dobijanje niže vrednosti povezano je sa činjenicom da u ovakvoj koncepciji eksperimenta nije moguće ostvariti pravu adijabatsku ekspanziju (relativno uzan otvor slavine i eventualno ispuštanje vazduha na slavini i drugim zaptivkama).