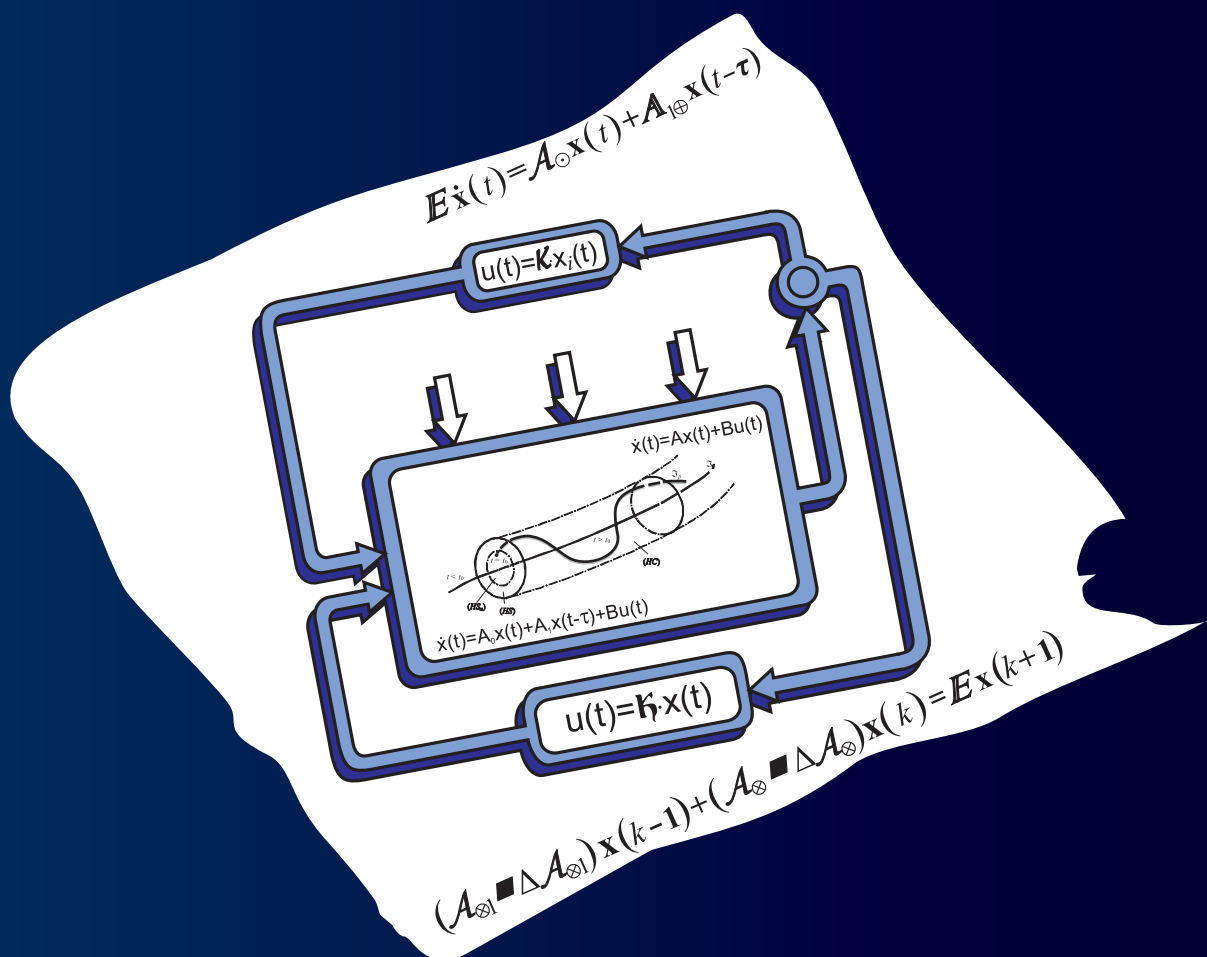


ZBIRKA ZADATAKA IZ DINAMIKE POSEBNIH KLASA SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Dragutin Lj. Debeljković



Dr Dragutin Lj. Debeljković

**ZBIRKA ZADATAKA
IZ DINAMIKE POSEBNIH KLASA
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA
SA IZVODIMA IZ TEORIJE**

*Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
2014*

Dr **Dragutin Lj. Debeljković**, redovni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

**Zbirka zadataka
iz Dinamike posebnih klasa
sistema automatskog upravljanja**

Zbirka zadataka

I izdanje

Recenzenti

Dr Mihailo P. Lazarević, redovni profesor
Mašinskog fakulteta u Beogradu

Dr Sreten B. Stojanović, vanr. prof.
Tehnološkog fakulteta u Leskovcu

Izdavač

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet Beograd
11000 Beograd, Kraljice Marije 16

Za izdavača

Dr Aleksandar Obradović, prof.

Odobreno za štampu

odlukom *Dekana* br. 255/13 od 14.11.2013.

Beograd, 2014

Tiraž: 200 primeraka

Štampa PLANETA print

ISBN 978-86-7083-829-1

*Preštampavanje, umnožavanje, fotokopiranje
ili reprodukcija cele knjige ili nekih njenih delova nije dozvoljena*

Dr Dragutin Lj. Debeljković

**ZBIRKA ZADATAKA
IZ DINAMIKE POSEBNIH KLASA
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA
sa izvodima iz teorije**

**Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
2014**

**ZBIRKA ZADATAKA IZ
DINAMIKE POSEBNIH KLASA
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

Predgovor

Linearni sistemi su oduvek privlačili pažnju naučne i stručne javnosti i taj interes postoji i dan danas i zaokuplja sve tehničke discipline podržan snažnim matematičkim aparatom osnovanim na odabranim poglavljima linearne algebre, operatorskog računa i teorije diferencijalnih jednačina, sa i bez pomenog argumenta, što im neosporno daje veliki značaj, pa je samim tim prirodno da se još jednom nađu u stvarnoj žiži interesovanja a sa nekih drugih aspekta njihovog dinamičkog delovanja i ponašanja.

Već više od dve pune decenije *singularni* (deskriptivni) sistemi privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta.

Njihovo prisustvo u svim granama tehnike i u pojedinim oblastima društvenih nauka više je nego evidentno, što obavezuje da im se sa svih mogućih aspekata proučavanja posveti dužna pažnja.

U matematičkom smislu ovi sistemi su predstavljeni kombinacijom diferencijalnih (diferencnih) i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje treba zadovoljiti pri rešavanju onih prvih.

Već više od pola veka *sistemi sa kašnjenjem* privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta.

Njihovo prisustvo u svim granama nauke i tehnike više je nego evidentno i u tom smislu brojni naučni radovi i obimna publicistička delatnost u punoj meri su iskazali interes koji je za njih bio pokazan.

U matematičkom smislu, ova klasa sistema opisana je običnim diferencijalnim (diferencnim) jednačinama sa pomenim argumentom, što uslovljava čitav niz dodatnih poteškoća pri njihovom rešavanju.

S druge strane, u prvom slučaju, kao sistemi beskonačne dimenzije, njihovo proučavanje u kompleksnom domenu uslovljeno je suočavanjem sa transcendentnim prenosnim funkcijama, što u izvesnim slučajevima zahteva radikalnu preformulaciju postojećih kriterijuma i metoda razvijenih za obične linearne sisteme, a ponekada i formiranje sasvim novih prilaza i postupaka za razrešavanje postavljenih zadataka kako klasične, tako i moderne teorije automatskog upravljanja.

U tom smislu dosta prostora bilo je posvećeno izučavanju osobina tzv. singularnih sistema i sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem kao i njihovim diskretnim analoganima.

Valja istaći da postoji veliki broj sistema automatskog upravljanja u kojima je izražen istovremeni fenomen čisto vremenskog kašnjenja i evidentna singularnost tako da ova klasa sistema poznata pod imenom *Singularni* (deskriptivni) *sistemi sa kašnjenjem* zaslužuje posebnu pažnju imajući u vidu da nedvosmisleno objedinjuje ranije ukazane specifičnosti pojedinačnih klasa, ovde, opisanih sistema.

Ovi sistemi imaju mnoge specifične karakteristike.

Ako želimo da ih rigorozno opišemo, da ih projektujemo sa zavidnim stepenom tačnosti ili da kvalitetno upravljamo njima, moramo tada da poklonimo veoma veliku pažnju dubokoj spoznaji njihovih suštinskih osobina i posebnosti koje ih u, velikoj meri, razlikuju od drugih klasa sistema.

U matematičkom smislu ova klasa sistema automatskog upravljanja predstavljena je kuplovanim singularnim sistemom diferencijalnih (diferencnih) jednačina sa pomenim argumentom, kojima je pridružen sistem odgovarajućih algebarskih jednačina koje u opštem slučaju mogu biti, takođe, sa pomenim argumentom ili bez njega.

U prvom delu ovog udžbenika težište interesovanja bilo je usmereno ka izučavanju bazičnih osobina pomenutih klasa sistema automatskog upravljanja.

Kao i uvek, u žiži interesovanja sa stanovišta dinamike ovde izučavanih klasa sistema, bila su pitanja njihove stabilnosti u klasičnom (*ljapunovskom*) smislu, ali i sa stanovišta jednog drugog koncepta, tzv. *theničke stabilnosti sistema*, koja se u savremenoj literaturi susreće pod nazivom *stabilnost na konačnom vremenskom intervalu*.

U savremenoj teoriji upravljanja sistemima predloženi su i koriste se različiti koncepti stabilnosti, kao na primer: *ljapunovska*, *neljapunovska* i *tehnička stabilnost*, *stabilnost tipa "ograničeni ulaz - ograničeni izlaz"*, *krajnja stabilnost*, itd., od kojih se, u prvom redu očekuje da odgovore na mnoga suštinska pitanja o osobinama kretanja sistema.

U tom smislu, u standardnom kontekstu ovih razmatranja, uvažavajući usvojene klase razmatranih sistema, uobičajeno se prvo razjašnjavaju pitanja vezana za definiciju, postojanje, jedinstvenost i stabilnost ravnotežnog stanja sistema, a zatim se, shodno predloženim konceptima, daju definicije i odgovarajući uslovi stabilnosti.

Na taj način, dolazi se do potrebne platforme i pozicija sa kojih je moguće efikasno analizirati dinamičko ponašanje razmatranih sistema sa željenog aspekta.

Jasno je da se, korišćenjem odgovarajućih kriterijuma, mogu dobiti odgovori po pitanju stabilnosti razmatranih sistema i bez rešavanja njihovih diferencijalnih jednačina kretanja, čime se postiže pun analitički efekat.

Ovde izložena materija, u potpunosti, sledi nastavni program predmeta *Dinamika posebnih klasa sistema automatskog upravljanja*, koji se kao izborni predmet sluša u IX semestru i namenjena je, prvenstveno studentima odseka za *automatsko upravljanje* Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Ova **zbirka zadataka** sazdana je, prvenstveno, od originalnih primera sastavljenih na bazi dugogodišnjeg iskustva autora ali i izvesnog broja zadataka preuzetih iz ranije objavljenih tematskih monografija jer isti, u velikoj meri, predstavljaju eklatantne primere koji na najbolji način ilustruju materiju, izloženu u osnovnom udžbeniku.

Posebnim načinom pisanja, zainteresovani čitalac se upućuje na izvornu literaturu ili alternativnu, lako dostupnu.

Dr Mihailu P. Lazareviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu i Dr Sretenu B. Stojanoviću, vanrednom profesoru Tehnološkog fakulteta Univerziteta u Nišu zahvalan sam na korisnim sugestijama i trudu oko recenzije.

Beograd, maj 2014. god.

A u t o r

SADRŽAJ

DINAMIKA SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Dinamika kontinualnih singularnih sistema

I KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI	1
1. OPŠTE OSOBINE, SPECIFIČNOSTI I DINAMIČKO PONAŠANJE SINGULARNIH SISTEMA	1
1.1 Uvodna razmatranja	1
1.2 Osnovne dinamičke osobine	2
1.2.1 Matematički opis kontinualnih singularnih sistema	2
1.2.2 Priroda i osobenosti i klasifikacija kontinualnih singularnih sistema	4
1.2.3 Rešljivost linearnog singularnog sistema diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima	7
1.2.4 Konzistentni početni uslovi	9
1.2.5 Prenosna funkcija	12
1.2.6 Impulsno ponašanje	13
1.2.7 Rešavanje sistema singularnih diferencijalnih jednačina i određivanje kretanja singularnog sistema u prostoru stanja	19
Literatura	26

2. MATEMATIČKI MODELI KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA	29
2.1 Primeri singularnih sistema u elektotehnici	29
2.2 Primeri singularnih sistema u mašinstvu	36
2.3 Primeri singularnih sistema u teoriji upravljanja	37
Literatura	38
3. ODREĐIVANJE KANONIČKIH FORMI. ISPITIVANJE UPRAVLJIVOSTI I OSMOTRIVOSTI	39
Literatura	59
4. SRAČUNAVANJE PSEUDOINVERZIJA	61
Literatura	94
5. ISPITIVANJE REŠLJIVOSTI LINEARNIH KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA	95
Literatura	102
6. ODREĐIVANJE KONZISTENTNIH POČETNIH USLOVA	103
Literatura	108
7. KRETANJE LINEARNOG SINGULARNOG SISTEMA U PROSTORU STANJA	109
Literatura	120
8. ODREĐIVANJE MATRICE PRENOŠNIH FUNKCIJA, IMPULSNO PONAŠANJE I REALIZACIJA	121
Literatura	133
9. PROUČAVANJE LINEARNIH KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA PRIMENOM ORTOGONALNIH FUNKCIJA	135
Literatura	142
10. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI PO LJAPUNOVU	143
Literatura	154

11. DINAMIČKA ANALIZA KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA	155
Literatura	184
12. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU	185
Literatura	188

Dinamika diskretnih deskriptivnih sistema

II DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI	189
13. OPŠTE OSOBINE, SPECIFIČNOSTI I DINAMIČKO PONAŠANJE DESKRIPTIVNIH SISTEMA	189
13.1 Uvodna razmatranja	189
13.2 Osnovne dinamičke osobine	190
13.2.1 Matematički opis diskretnih deskriptivnih sistema	190
13.2.2 Priroda, osobenosti i klasifikacija diskretnih deskriptivnih sistema	191
13.2.3 Rešljivost linearnog singularnog sistema diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima	192
13.2.4 Konzistentni početni uslovi	195
13.2.5 Prenosna funkcija	199
13.2.6 Rešavanje sistema singularnih diferencnih jednačina i određivanje kretanja deskriptivnog sistema u prostoru stanja	202
Literatura	205
14. MATEMATIČKI MODELI DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA	207
14.1 Primeri diskretnih deskriptivnih sistema u elektrotehnici	207
14.2 Primeri diskretnih deskriptivnih sistema u ekonomiji	208
14.3 Primeri diskretnih deskriptivnih sistema u demografiji	209
Literatura	210

15. ODREĐIVANJE KANONIČKIH FORMI. ISPITIVANJE UPRAVLJIVOSTI I OSMOTRIVOSTI	211
Literatura	214
16. ISPITIVANJE REŠLJIVOSTI LINEARNIH DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA	215
Literatura	218
17. MATRICA PRENOSNIH FUNKCIJA, REALIZACIJA I KAUZALNOST DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA	219
Literatura	228
18. DINAMIČKA ANALIZA DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA	229
Literatura	248
19. STABILNOST DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA U SMISLU LJAPUNOVA	249
Literatura	252
20. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI I OGRANIČENOSTI KRETANJA NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU	253
Literatura	254

*DINAMIKA
SISTEMA AUTOMATSKOG
UPRAVLJANJA
SA ČISTIM VREMENSKIM
KAŠNJENJEM*

*Dinamika
kontinualnih sistema sa kašnjenjem*

III KONTINUALNI SISTEMI

SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM 255

21. OPŠTE OSOBINE, SPECIFIČNOSTI

I DINAMIČKO PONAŠANJE SISTEMA SA KAŠNENJEM 255

21.1 Uvodna razmatranja 255

21.2 Osnovne dinamičke osobine 257

21.2.1 Matematički opis kontinualnih sistema sa kašnjenjem 257

21.2.2 Određivanje kretanja
kontinualnog sistema sa kašnjenjem u prostoru stanja 258

21.2.3 Prenosna funkcija 260

Literatura 261

22. STABILNOST

KONTINUALNIH SISTEMA SA

ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM

U SMISLU LJAPUNOVA 263

Literatura 293

23. PRIMERI

ISPITIVANJA STABILNOSTI

I OGRANIČENOSTI KRETANJA

NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU 299

Literatura 311

*Dinamika
diskretnih
sistema sa kašnjenjem*

IV DISKRETNII SISTEMI SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM	315
24. OPŠTE OSOBINE, SPECIFIČNOSTI I DINAMIČKO PONAŠANJE SISTEMA SA KAŠNENJEM	315
24.1 Uvodna razmatranja	315
24.2 Osnovne dinamičke osobine	319
24.2.1 Matematički opis diskretnih sistema sa kašnjenjem	319
24.2.2 Određivanje kretanja diskretnog sistema sa kašnjenjem u prostoru stanja	322
24.2.3 Prenosna funkcija	324
Literatura	326
25. STABILNOST DISKRETNII SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM U SMISLU LJAPUNOVA	327
Literatura	352
26. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI I OGRANIČENOSTI KRETANJA NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU	357
Literatura	360

*DINAMIKA
SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH
SISTEMA AUTOMATSKOG
UPRAVLJANJA*

*Dinamika
kontinualnih singularnih
sistema sa kašnjenjem*

27. STABILNOST KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM U SMISLU LJAPUNOVA	361
Literatura	378
28. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI I OGRANIČENOSTI KRETANJA NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU	381
Literatura	395

*Dinamika
diskretnih deskriptivnih
sistema sa kašnjenjem*

29. STABILNOST DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNENJEM U SMISLU LJAPUNOVA	397
Literatura	406
30. PRIMERI ISPITIVANJA STABILNOSTI I OGRANIČENOSTI KRETANJA NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU	409
Literatura	412

Dodaci

V DODACI	413
DODATAK A – Oznake	413
DODATAK B – Posebne matricne strukture	419
Literatura	419
DODATAK C – Normirani vektorski prostori	421
Literatura	424
DODATAK D – Schur–ov komplement	425
Literatura	427
DODATAK E – Izvod iz teorije skupova	429
E.1 Preliminarna razmatranja	429
E.2 Osnovne operacije nad skupovima	430
E.3 Algebra skupova	433
E.4 Još neke značajne osobine skupova	433
Literatura	434
DODATAK F – Svojstva konstantnih matrica i matičnih parova	435
Literatura	442
DODATAK G – Direktno određivanje vektorske baze nultog prostora matrica	443
Literatura	444
DODATAK H – Spektralna dekompozicija i anihilatori matrica	445
Literatura	448