Dr Mirjana Simić-Pejović

# PRIMENA FURIJEOVE ANALIZE U TELEKOMUNIKACIJAMA

AKADEMSKA MISAO
Beograd, 2021.

Dr Mirjana Simić-Pejović, vanredni profesor
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail:mira@etf.rs

**PRIMENA FURIJEOVE ANALIZE U TELEKOMUNIKACIJAMA**

Recenzenti:
Dr Milan Bjelica, redovni profesor
Dr Nataša Ćirović, vanredni profesor

Nastavno-naučno veće Elektrotehničkog fakulteta odobrilo je objavljivanje ovog udžbenika odlukom broj 50/2 od 03.02.2021.godine.

Izdavači:
Akademska misao, Beograd
Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu
Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11120 Beograd, Srbija

Štampa:
Akademska misao, Beograd

Tiraž
50 primeraka

ISBN 978-86-7466-874-0 (štampano izdanje)

ISBN:978-86-7225-079-4 (elektronski udžbenik)
https://www.etf.bg.ac.rs/uploads/files/udzbenici/2020/Primena%20Furijeove%20analize%20u%20telekomunikacijama.pdf

Mesto i godina izdavanja
Beograd, 2021.



Tekst ove knjige složen je u programskom paketu LaTeX $2_{\varepsilon}$.

# Sadržaj

# Predgovor

Ovaj udžbenik je proizašao iz materijala pripremljenih za predavanja i vežbe za predmet Osnovi telekomunikacija na smeru za Elektroniku, u okviru osnovnih studija na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Udžbenik pokriva deo gradiva za predmet Osnovi telekomunikacija koji se predaje na drugoj godini studija, a cilj mu je da se studentima netelekomunikacionih odseka na što jednostavniji način omogući savladavanje planiranog gradiva.

Materijal prati teorijske postavke nastavnih jedinica koje se obrađuju na predavanjima, kao i zadatke koji prate ove nastavne jedinice i rade se na časovima vežbi. Polaznu temu u udžbeniku čine linearni vremenski nepromenljivi sistemi koji zajedno sa sinusoidalnim signalima i njihovim osobinama u osnovi predstavljaju motivaciju za Furijeovu analizu signala. Sledi Furijeova analiza periodičnih signala, odnosno Furijeovi redovi. Radi potpunijeg razumevanja što kroz teoriju što kroz vizuelizaciju, kao i radi lakšeg rešavanja električnih kola, u okviru ove teme razmatrani su i fazori kao i veza Furijeovih redova i fazora. Udžbenik obuhvata i Furijeovu analizu za aperiodične determinističke signale u okviru teme Furijeova transformacija, kao i za slučaj signala koji nisu deterministički, u okviru teme diskretna Furijeova transformacija. Za svaku od tema, radi lakšeg praćenja i razumevanja izlagane materije, u tekst su uključeni i primeri u formi kraćih zadataka.

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima koji slušaju predmet Osnovi telekomunikacija na smeru za Elektroniku, ali se autor nada da će knjiga biti od koristi i studentima drugih smerova kao i samim inženjerima.

Autor se zahvaljuje recenzentima dr Milanu Bjelici, redovnom profesoru, i dr Nataši Ćirović, vanrednom profesoru na korisnim sugestijama tokom izrade ovog udžbenika. Takođe, autor se zahvaljuje dr Predragu Pejoviću, redovnom profesoru, na stručnim diskusijama koje su umnogome doprineli kvalitetu sadržaja ovog udžbenika. Posebnu zahvalnost autor upućuje studentima Elektrotehničkog fakulteta koji su svojim pitanjima i sugestijama značajno uticali na konačan oblik ovog udžbenika.

Autor

U Beogradu, decembra 2020. godine

# Glava 1

# LTI sistemi

Formalno govoreći, LTI (*Linear Time-Invariant*) sistemi su sistemi kod kojih važe osobina linearnosti (*Linear*, L) i vremenske nepromenljivosti (*Time-Invariant*, TI).

## 1.1 Linearnost

U linearnim sistemima važi princip superpozicije. Princip superpozicije zasniva se na osobinama: aditivnosti i homogenosti.

Osobina aditivnosti zahteva da je odziv (izlaz) sistema na brojne različite pobude (ulazne signale) kojima je simultano izložen, jednak zbiru odziva na svaku pojedinačnu pobudu. Osobina homogenosti zahteva da kad god je ulazni signal skaliran nekim konstantnim faktorom, i izlazni signal mora biti skaliran identičnim konstantnim faktorom. Drugim rečima, izlaz linearnog sistema na linearnu kombinaciju ulaznih signala, jednak je istoj linearnoj kombinaciji izlaznih signala gde svaki izlazni signal odgovara određenom ulaznom signalu [1].

Dakle, sistem je linearan ako je ispunjeno:

$$\text{ako je} \quad x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad \text{i} \quad x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad \text{tada je} \quad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \tag{1.1}$$

gde su $\alpha$ i $\beta$ konstante različite od nule. Na slici 1.1 dat je primer linearnog sistema.

U linearnim sistemima, kada je ulaz jednak nuli, izlaz iz sistema je uvek nula. Vrlo je važno naglasiti da linearnost omogućava dekompoziciju složenih ulaznih signala na linearnu kombinaciju nekih osnovnih, najčešće dobro poznatih signala, čiji je izlaz mnogo lakše odrediti.

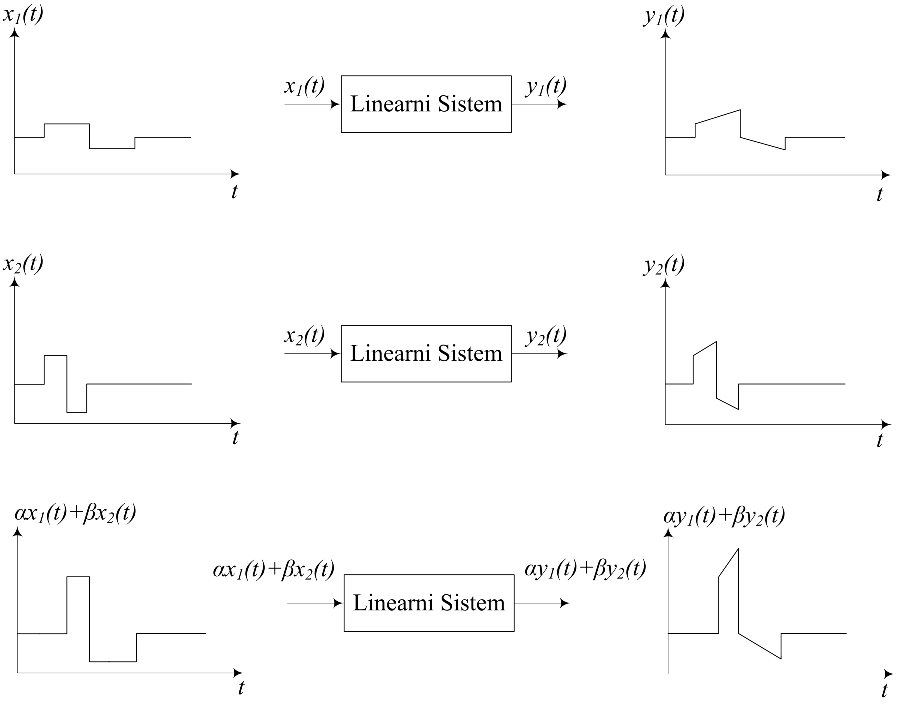
## 1.2 Vremenska nepromenljivost

Kod vremenski nepromenljivih sistema veza ulaza i izlaza se ne menja tokom vremena. To znači da vremensko kašnjenje ili napredovanje ulaznog signala rezultira odgovarajućim vremenskim pomeranjem i izlaznog signala. Dakle, karakteristike vremenski nepromenljivih sistema se ne menjaju tokom vremena. Drugim rečima, za dati ulazni signal, izlaz iz vremenski nepromenljivog sistema ostaje isti bez obzira kada se taj signal pojavi na ulazu u sistem.

Sistem je vremenski nepromenljiv (TI) ako i samo ako je ispunjeno:

$$\text{ako je} \quad x(t) \longrightarrow y(t) \quad \text{tada je} \quad x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau) \tag{1.2}$$

gde je $\tau$ realna konstanta različita od nule. Na slici 1.2 dat je primer vremenski nepromenljivog sistema.




Slika 1.1: Linearni sistem.

## 1.3 Linearni vremenski nepromenljivi sistemi, LTI

Kod linearnih vremensko nepromenljivih sistema (LTI) ispunjen je i uslov linearnosti (1.1) i uslov vremenske nepromenljivosti (1.2).

Linearnost: ako je $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ i $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$ tada je $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$

Vremenska nepromenljivost: ako je $x(t) \longrightarrow y(t)$ tada je $x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$.

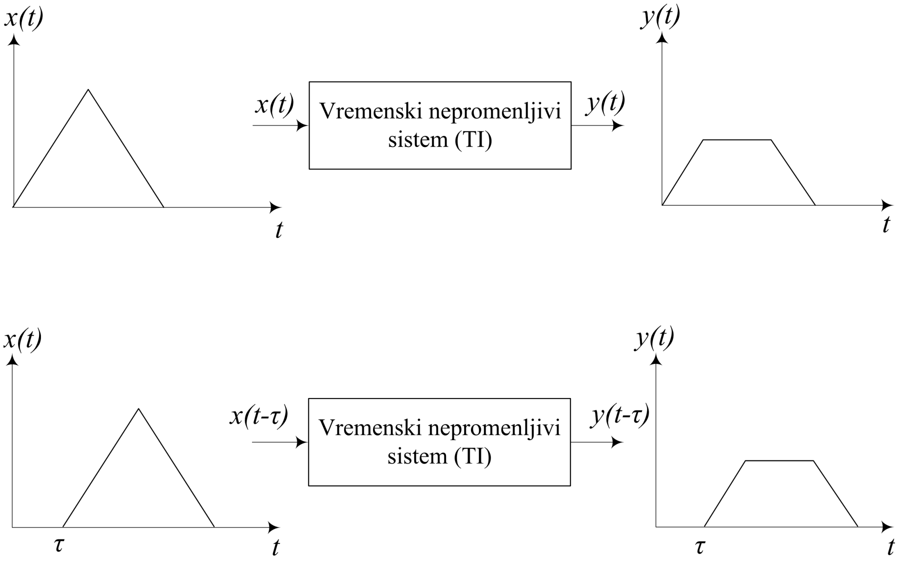
Važno je naglasiti da se u vremenskom domenu LTI sistem u potpunosti može okarakterisati jednom jedinom funkcijom a to je impulsni odziv sistema (odziv sistema $h(t)$ sa nultim početnim uslovima kada je na njegovom ulazu delta impuls $\delta(t)$). Poznavajući samo impulsni odziv, primenom konvolucije moguće je dobiti odziv LTI sistema na bilo koji drugi ulazni signal. Ekvivalentna veličina u frekvencijskom domenu je funkcija prenosa, $H(f)$, slika (1.4).

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{1.3}$$

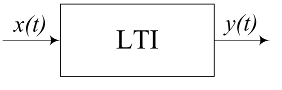
gde $*$ označava operaciju konvolucije. Jednačina (1.3) se zove konvolucioni integral. U frekvencijskom domenu odziv se dobija kao

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega). \tag{1.4}$$

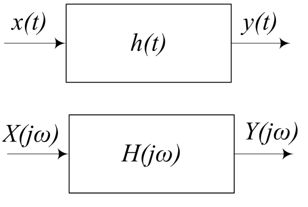
Treba istaći da na izlazu iz LTI sistema mogu postojati samo one frekvencijske komponente koje su bile na ulazu u LTI sistem. Drugim rečima, LTI sistem ne može generisati nove frekvencijske komponente. U skladu sa tim, možemo zaključiti da u LTI sistemima ako se na ulaz




Slika 1.2: Vremenski nepromenljiv sistem.

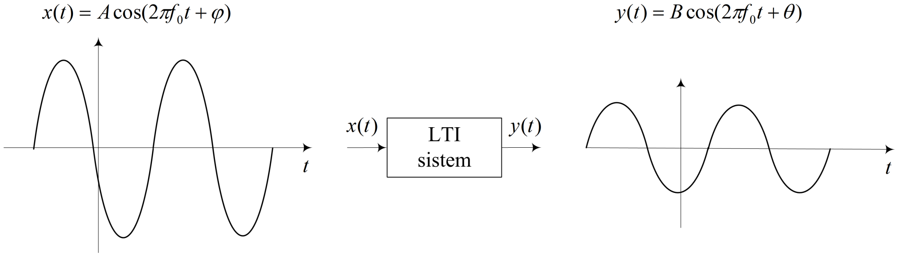



Slika 1.3: Linearni vremenski nepromenljivi sistem.




Slika 1.4: LTI sistem, vremenski i frekvencijski domen.

dovede sinusoida, izlaz je takođe sinusoida. Ona može biti drugačije amplitude i početne faze u odnosu na sinusoidu na ulazu u sistem, ali njihova frekvencija ostaje ista. Dakle, LTI sistemi održavaju princip: sinusoida na ulazu - sinusoida na izlazu [1], slika (1.5).




Slika 1.5: Sinusoidalni signali u LTI sistemima.

Naglasimo i to da se LTI sistem može modelovati kao linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima [2]. Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x(t) \tag{1.5}$$

uz dodatna dva uslova:

1. koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ i $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ moraju biti konstantni, tj. ne zavisiti od vremena. Ovaj uslov obezbeđuje da je posmatrani sistem vremenski nepromenljiv (TI);

2. početni uslovi moraju biti jedanaki nuli. Ovaj uslov obezbeđuje da je posmatrani sistem linearan (L).

**Primer 1**. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t). \tag{1.6}$$

Kako nisu dati početni uslovi, smatra se da su jednaki nuli pa ovo jeste linearni sistem. Koeficijenti u ovom sistemu su: $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 4$, $b_0 = 1$ i svi su konstante, tj. ne zavise od vremena, pa ovo jeste i vremenski nepromenljivi sistem. Kako su ispunjena oba uslova a jednačina (1.6) ima standardni oblik (1.5), zaključujemo da je sistem (1.6) linearni i vremenski nepromenljiv, tj. LTI [3].

**Primer 2**. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2(\frac{dy(t)}{dt})^2 + y(t) = x(t). \tag{1.7}$$

Koeficijenti u ovom sistemu su: $a_1 = 2$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ i svi su konstante, tj. ne zavise od vremena, pa ovo jeste vremenski nepromenljivi sistem. Ipak, forma (1.7) ne odgovara standardnoj formi LTI sistema pošto sadrži kvadrat člana $(\frac{dy(t)}{dt})$ koji u (1.5) ne postoji, pa ovaj sistem nije linearni. Dakle, sistem (1.7) nije LTI.

**Primer 3**. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2t\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t). \tag{1.8}$$

Kako nisu dati početni uslovi a jednačina (1.8) ima standardni oblik (1.5), ovaj sistem jeste linearni. Koeficijenti u ovom sistemu su $a_2 = 2$, $a_1 = 2t$, $b_1 = 1$, $b_0 = 2$, pri čemu koeficijent $a_1$ nije konstanta i menja se sa vremenom, pa zaključujemo da je ovaj sistem vremenski promenljiv. Dakle, sistem (1.8) nije LTI.