Ćemal Dolićanin
Miloš Arsenović   Miljan Knežević

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE IV

Akademska misao
Državni univerzitet u Novom Pazaru
Beograd, 2021.

Ćemal Dolićanin • Miloš Arsenović • Miljan Knežević

FUNDAMENTI MATEMATIČKE ANALIZE IV

Recenzenti
prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu i redovni član SANU
prof. dr Dragan Đorđević, redovni profesor PMF-a Univerziteta u Nišu
prof. dr Stojan Radenović, redovni profesor u penziji Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Izdavači
Državni univerzitet u Novom Pazaru, Novi Pazar
Akademska misao, Beograd

Za izdavače
prof. dr Miladin Kostić, rektor
Marko Vujadinović, dipl. inž. elektr.

Štampa
Akademska misao, Beograd

Tiraž
100 primeraka

ISBN 978-86-81506-08-0

Odlukom rektora Državnog univerziteta u Novom Pazaru prof. dr Miladina Kostića br. 533/21 od 17.2.2020. godine, rukopis je odobren za štampu kao univerzitetski udžbenik.

Sadržaj

Predgovor

Udžbenik *Fundamenti matematičke analize IV* predstavlja nastavak serije udžbenika:

– *Fundamenti matematičke analize I*,

– *Fundamenti matematičke analize II*,

– *Fundamenti matematičke analize III*,

redom, autora:

– Ć. Dolićanin, Đ. Dugošija i J. Vukmirović,

– Ć. Dolićanin i Đ. Dugošija,

– Ć. Dolićanin, M. Knežević i N. Cakić,

i obuhvata gradivo iz matematičke analize predviđeno za izučavanje u IV semestru studija, za smerove matematike i informatike na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, ali i predavačima i studentima drugih fakulteta na kojima se izučava matematika sa programom sličnim programu ovog Univerziteta.

Gradivo ovog udžbenika, koji sadrži poglavlja:

1) Neprekidnost, kompaktnost i apsolutna neprekidnost,

2) Funkcije ograničene varijacije,

3) Teorija Stiltjesovog integrala,

4) Uvod u teoriju mere,

koja, uglavnom, čine gradivo funkcionalne analize, izloženo je na savremen način, veoma koncizno i detaljno. Način izlaganja i dokazi nekih delova su originalni i predstavljaju doprinos matematičkoj literaturi.

Detaljno urađeni primeri pokazuju bogatu mogućnost primene teorije iz navedena četiri poglavlja i u drugim oblastima.

Zahvaljujemo recenzentima prof. dr Stevanu Pilipoviću, redovnom članu SANU, prof. dr Draganu Đorđeviću i prof. dr Stojanu Radenoviću na značajnim primedbama i sugestijama.

Ističemo zahvalnost saradnicima doc. dr Dženisu Pučiću, doc. dr Emiru Zogiću, Enesu Kačaporu i Ersinu Giliću, koji su uložili veliki trud u tehničkoj obradi i finalizaciji ovog udžbenika.

U Novom Pazaru i Beogradu, januar 2021. *Autori*

Glava 1

Neprekidnost, kompaktnost i apsolutna neprekidnost

Iz ranijih kurseva matematičke analize veoma podrobno su obrađene celine: granična vrednost i neprekidnost funkcije, tačke prekida funkcije, metrički prostori i drugo.

Ovde, a imajući u vidu značaj navedenih pojmova, kao što su u prvom redu neprekidnost, tačke prekida i kompaktnost, za izučavanje poglavlja *Funkcije ograničene varijacije* i *Stiltjesov integral*, ponovićemo neke činjenice vezane za navedene pojmove, kao i njihovu povezanost.

Navedeno je tim pre od koristi, jer će se studenti ovom prilikom ponovo podsetiti tako važnih fundamentalnih matematičkih pojmova.

1.1 Kompaktni i relativno kompaktni skupovi

Iz ranijih kurseva matematičke analize nam je poznato da svaki ograničen beskonačan skup na realnoj pravoj ima bar jednu konačnu tačku nagomilavanja.

Navedenu činjenicu, inače poznatu kao *Bolcano–Vajerštrasovo svojstvo* za ograničene beskonačne skupove, tj. nizove, na realnoj pravoj, iskazujemo na sledeći način:

Svaki ograničen beskonačan skup, tj. niz, na realnoj pravoj ima Bolcano–Vajerštrasovo svojstvo.

Veoma je važno istaći da Bolcano–Vajerštrasovo svojstvo ne važi u opštim metričkim prostorima, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.1.1. U metričkom prostoru ℓ_p, $p \geq 1$, beskonačan skup $\{e_1, e_2, \dots\}$ jediničnih vektora $e_1, e_2, \ldots$ je ograničen, jer svi vektori pripadaju jediničnoj sferi, ali nema nijednu tačku nagomilavanja, jer je

$$\mathrm{d}(e_m, e_n) = 2^{1/p}, \quad m \neq n.$$

Podsećanja radi, ponovimo da pod ℓ_p, $p \geq 1$, podrazumevamo skup svih realnih nizova (ξ_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, takvih da red $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p$ konvergira, tj. takvih da je

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p < +\infty.$$

Inače, za $p \geq 1$ fiksirano i ℓ_p skup nizova sa gore navedenom osobinom važi:

(1) da je skup ℓ_p jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na operacije sabiranje nizova i množenje nizova realnim skalarom, koje uvodimo na uobičajeni način;

(2) da je formulom

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pri čemu su $x = (\xi_\nu)$ i $y = (\eta_\nu)$ proizvoljni vektori iz ℓ_p, definisana jedna metrika na ℓ_p;

(3) da je prostor (ℓ_p, d_p) kompletan metrički prostor (slučaj $p = 1$ je za nijansu lakši, te preporučujemo da se prvo razmotri taj specijalan slučaj).

Iz navedenog razloga metričke prostore koji imaju Bolcano–Vajerštrasovo svojstvo nazivamo, kao što je već od ranije poznato, kompaktnim metričkim prostorima.

Dakle, metrički prostor X je *kompaktan* ako svaki njegov beskonačan deo ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Definicija 1.1.1. Ako je X metrički prostor, tada skup $A \subset X$ nazivamo *kompaktan* ako je posmatran zasebno, sam za sebe, kompaktan prostor, a *relativno kompaktan* ako je njegova adherencija kompaktan skup.

Navedeni Primer 1.1.1, u kojem je razmatran skup $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, prostora ℓ_p, $p \geq 1$, pokazuje da, u opštem slučaju, ograničenost ne obezbeđuje relativnu kompaktnost skupa.

U cilju određivanja svojstva koje je merodavno za utvrđivanje relativne kompaktnosti skupa, u opštem metričkom prostoru, uvodimo novi pojam, tzv. *totalnu ograničenost.*

Definicija 1.1.2. ε-*mreža* skupa $A \subset X$ je familija tačaka M_ε takva da familija otvorenih kugli sa centrima u tačkama M_ε, poluprečnika ε, pokriva skup A, tj. ako je

$$A \subset \bigcup_{y \in M_\varepsilon} K(y, \varepsilon),$$

gde je $K(y, \varepsilon)$ otvorena kugla sa centrom $y \in M_\varepsilon$, poluprečnika ε.

Definicija 1.1.3. Za skup $A \subset X$ kažemo da je *totalno ograničen* ako za svako $\varepsilon > 0$ ima konačnu ε-mrežu.

Stav 1.1.1. Svaki totalno ograničen skup $A \subset X$ je i ograničen. Obrnuto ne važi.

Dokaz. Zaista, ako sa $\mathrm{d}(A)$ označimo dijametar skupa A, tada imamo

$$\mathrm{d}(A) \leq \mathrm{d}(M_\varepsilon) + 2\varepsilon < +\infty.$$

Ovo sledi iz činjenice da je $\mathrm{d}(M_\varepsilon)$ konačan broj, jer M_ε ima samo konačan broj tačaka. Dakle, totalno ograničen skup A je i ograničen.

Da obrnuto ne važi sledi na osnovu Primera 1.1.1. Zaista, skup $\{e_n\}$ u prostoru ℓ_p, $p > 1$, jeste ograničen skup, ali nije totalno ograničen. □

Istaknimo da su u prostoru $\mathbb{R}^n$ pojmovi ograničenosti i totalne ograničenosti ekvivalentni.

Zaista, neka je A ograničen skup u $\mathbb{R}^n$. Tada je jasno da A pripada nekoj n-dimenzionalnoj kocki B_n, tj. A pripada B_n. Deleći kocku B_n na kocke čije su ivice manje od $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, njihova temena obrazuju jednu konačnu ε-mrežu u odnosu na B_n, pa, dakle, i u odnosu na A.

Dakle, na osnovu prethodnog i Stava 1.1.1 sledi ekvivalencija pojmova ograničenosti i totalne ograničenosti u $\mathbb{R}^n$.

Stav 1.1.2. Skup $A \subset X$ u kompletnom metričkom prostoru X je relativno kompaktan ako i samo ako je totalno ograničen.

Dokaz. Neka je skup $A \subset X$ totalno ograničen. Dokažimo da se tada iz svakog niza (x_n), $n \in \mathbb{N}$, u A može izdvojiti konvergentan podniz. Stoga, konstruišimo za svako $k = 1, 2, \ldots$ jednu konačnu $\frac{1}{k}$-mrežu u odnosu na A i tačke k-mreže označimo sa

$$y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_m^{(k)}.$$

Imajući u vidu da je unija kugli, poluprečnika 1, opisanih oko tačaka prve mreže pokrivač celog skupa A, onda među njima postoji makar jedna, od njih konačno mnogo, koja sadrži jedan podniz niza (x_n), u oznaci $x_n^{(1)}$. Analogno zaključujemo da postoji bar jedna kugla, poluprečnika $1/2$, opisana oko neke tačke druge mreže, koja sadrži jedan podniz niza $x_n^{(1)}$, u oznaci $x_n^{(2)}$.

Nastavljajući prethodni postupak, dobijamo niz podnizova

$$\begin{array}{ccc} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{1.1.1}$$

niza (x_n), od kojih je svaki sledeći podniz prethodnog i pri čemu članovi k-tog podniza zadovoljavaju nejednakost

$$\mathrm{d}\left(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}\right) < \frac{2}{k}, \quad \text{za svako } m \text{ i } n \text{ iz } \mathbb{N}.$$

Ovo sledi iz činjenice da svi članovi k-tog po redu niza pripadaju istoj kugli k-mreže.

Dijagonalni niz iz tablice (1.1.1), tj. niz

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots,$$

jeste podniz niza (x_n) i pri tome je

$$\mathrm{d}\left(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}\right) < \frac{2}{n},$$

za svako m i n iz $\mathbb{N}$ za koje je $m > n$, pri čemu je $x_m^{(m)}$ jedan od članova

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

niza $(x_n^{(n)})$. Dakle, $(x_n^{(n)})$ je Košijev niz u X koji konvergira nekoj tački $x \in X$, jer je X kompletan prostor.

Ovim je pokazano da se iz svakog niza u A može izdvojiti konvergentan podniz. Sada se to lako prenosi na proizvoljne nizove iz $\overline{A}$. Naime, ako je x_n niz iz $\overline{A}$, tada možemo odabrati niz $y_n \in A$ tako da je $d(x_n, y_n) < 1/n$, a po dokazanom postoji podniz y_{n_k} koji konvergira ka $y \in X$. Lako je proveriti da je tada $\lim x_{n_k} = y$ i da je $y \in \overline{A}$.

Da bismo pokazali da važi obrnuto, tj. da iz relativne kompaktnosti skupa A sledi totalna ograničenost istog, u stvari ćemo dokazati da, ako skup A nije totalno ograničen, on tada nije relativno kompaktan. U tom cilju, pretpostavimo da za neko $\varepsilon > 0$ ne postoji konačna ε-mreža u odnosu na skup A. Tada, ako je $x_1 \in A$ proizvoljan, postoji $x_2 \in A$ tako da je

$$\mathrm{d}\left(x_2, x_1\right) \geq \varepsilon,$$

jer bi u protivnom tačka x_1 sama za sebe obrazovala jednu ε-mrežu u odnosu na A.

Analogno, postoji $x_3 \in A$ tako da je

$$\mathrm{d}(x_3, x_1) \geq \varepsilon \quad \text{i} \quad \mathrm{d}(x_3, x_2) \geq \varepsilon,$$

jer bi u protivnom x_1 i x_2 zajedno obrazovali jednu ε-mrežu u odnosu na A. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do niza tačaka (x_n) u skupu A za čije članove važi

$$\mathrm{d}(x_m, x_n) \geq \varepsilon, \quad m \neq n,$$

odakle se, kao što je očigledno, ne može izdvojiti konvergentan podniz, te skup A nije relativno kompaktan. Stav je u potpunosti dokazan. □

1.2 Neprekidnost i tačke prekida funkcije

Ovde ćemo se podsetiti nekih najvažnijih činjenica o neprekidnosti funkcija realne promenljive, kao i karakterističnim tačkama prekida, što će, sa aspekta primene, biti od koristi za dalje izlaganje ovog kursa.

1.2.1 Neprekidnost funkcije realne promenljive

Definicija 1.2.1. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je *neprekidna* u tački $a \in A$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da za svako $x \in A$, za koje važi

$$|x - a| < \delta, \tag{1.2.1}$$

sledi

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.2.2}$$

Kako iz (1.2.1) sledi (1.2.2), to je

$$f\left(K(a, \delta)\right) \subset K(f(a), \varepsilon),$$

a takođe i

$$f^{-1}\left(K(f(a), \varepsilon)\right) \supset f^{-1}\left(f(K(a, \delta))\right) \supset K(a, \delta).$$

Navedimo sledeće ekvivalentne definicije.

Definicija 1.2.2. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna je u tački $a \in A$ ako svakoj okolini $V \subset \mathbb{R}$ tačke $f(a)$ odgovara okolina $U \subset A$ tačke a, takva da je $f(U) \subset V$.

Definicija 1.2.3. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna je u tački $a \in A$ ako je inverzna slika $f^{-1}(V)$ svake okoline $V \subseteq \mathbb{R}$ tačke $f(a)$ jedna okolina $U \subset A$ tačke $a \in A$.

Imajući u vidu sličnost između definicija granične vrednosti i neprekidnosti funkcije f u tački $a \in A$ navešćemo stav koji iskazuje ekvivalenciju Košijeve i Vajerštrasove definicije granične vrednosti funkcije u tački.

Stav 1.2.1. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, ima u tački $a \in \mathbb{R}_p = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, pri čemu je a tačka nagomilavanja skupa A, graničnu vrednost $b \in \mathbb{R}_p$ ako i samo ako za svaki niz (x_n), za koji je $x_n \in A \setminus \{a\}$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, važi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

i x_n, $n \in \mathbb{N}$, proizvoljan niz takav da je $x_n \in A \setminus \{a\}$ i da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

Ako je V proizvoljna okolina tačke b, tada po pretpostavci postoji okolina U tačke a takva da je

$$f\,(U \setminus \{a\}) \subset V.$$

Izaberimo sada takav broj $n_0 \in \mathbb{N}$ da $x_n \in U$ za svako $n > n_0$. Tada, a na osnovu pretpostavke, $x_n \in U \setminus \{a\}$, jer je $x_n \neq a$, pa sledi $f(x_n) \in V$ za $n > n_0$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b.$$

Pretpostavimo sada obrnuto. Neka $f(x)$ ne konvergira ka b kad x teži ka a. Tada postoji okolina V tačke b takva da za svaku okolinu U tačke a važi

$$f\,(U \setminus \{a\}) \not\subset V.$$

Dakle, za svako n postoji $x_n \in (U_{1/n} \setminus \{a\})$ tako da $f(x_n) \notin V$. Iako za konstruisan niz (x_n) važi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a, \quad x_n \neq a, \quad n \in \mathbb{N},$$

ipak ne važi uslov

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b.$$

Dakle, ako nije

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

tada ne važi uslov dat u stavu, te dobijena kontradikcija i dokazuje Stav 1.2.1. $\square$

Kako smo dokaz Stava 1.2.1 u drugom delu sproveli za $a \in \mathbb{R}$, napomenimo da se dokaz analogno sprovodi i za $a \in \mathbb{R}_p$.

Istaknimo da, iako definicija neprekidnosti funkcije u tački ima sličnosti sa definicijom granične vrednosti funkcije u tački, ipak postoje i značajne razlike, kao što su:

1) U slučaju kad govorimo o neprekidnosti funkcije u tački a, tačka a ne mora biti tačka nagomilavanja skupa A, čak može biti i izolovana tačka skupa A, a to je onda kada u nekoj okolini U_a, osim same tačke a, nema drugih tačaka.

   U ovom slučaju, mada ne možemo govoriti o graničnoj vrednosti, tj.

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

   funkcija f, koja je definisana u tački a, jeste uvek neprekidna, jer je

$$f(U_a) = \{f(a)\} \subset V,$$

   za svaku okolinu V tačke $f(a)$.

   Specijalno, odavde sledi da je svaki niz

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

   neprekidna funkcija u svakoj tački $n \in \mathbb{N}$, jer su sve njegove tačke izolovane.

2) Kod definicije granične vrednosti funkcije f u tački $a \in A$ nije obavezno da je funkcija definisana u a. Čak i ako jeste, vrednost $f(a)$ ne utiče na vrednost granične vrednosti

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

   U slučaju kada je f definisana u tački $a \in A \subset \mathbb{R}$, koja je i tačka nagomilavanja, tada sledeći stav iskazuje vezu između pojmova neprekidnosti i granične vrednosti funkcije f u tački.

Stav 1.2.2. Ako je f funkcija

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R},$$

i $a \in A$ tačka nagomilavanja skupa A, tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:

1. Funkcija f je neprekidna u tački $a \in A$;

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

3. Za svaki niz (x_n), $x_n \in A$, za koji je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,$$

važi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Dokaz. Ekvivalencija iskaza 1. i 2. sledi na osnovu definicija granične vrednosti i neprekidnosti funkcije u tački, dok ekvivalencija iskaza 2. i 3. sledi na osnovu ekvivalencija Košijeve i Vajerštrasove definicije granične vrednosti funkcije, tj. Stava 1.2.1. □

Često je, a od interesa primene, u upotrebi sledeća definicija.

Definicija 1.2.4. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako beskonačno malom priraštaju $h = \Delta x = x - x_0$ argumenta x u tački x_0 odgovara beskonačno mali priraštaj

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad \text{ili} \quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

funkcije f.

Primetimo da smo ovde koristili neformalan izraz "beskonacno mali" koji se, naravno, može sasvim precizno iskazati jezikom teorije graničnih vrednosti, odnosno

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h f(x_0) = \lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0.$$

Zaista, iz poznatih veličina

$$h = \Delta x = x - x_0, \quad \text{tj.} \quad x = x_0 + \Delta x = x_0 + h,$$

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad \text{ili} \quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

očigledno sledi relacija

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ekvivalentna relaciji

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Primer 1.2.1. Funkcija f, zadata formulom

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 3/2, & x = 0, \end{cases} \qquad \text{(Slika 1.2.1)}$$

nije neprekidna u tački $x = 0$, jer ne postoji granična vrednost u toj tački, tj.

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Zaista, ako izaberemo dva niza

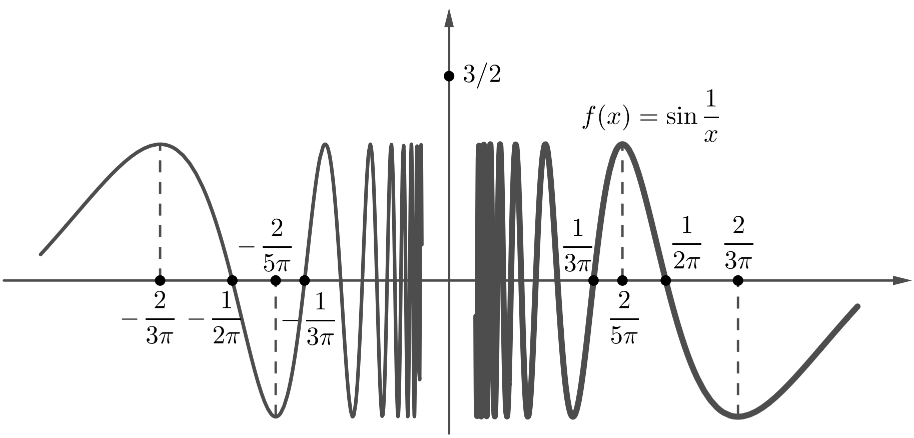
$$x_n^{'} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{i} \quad x_n^{''} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

koji konvergiraju ka nuli kad $n \to +\infty$, dobijamo

$$f(x_n^{'}) = 1 \quad \text{i} \quad f(x_n^{''}) = -1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, zaista ne postoji

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$



Slika 1.2.1. Slika uz Primer 1.2.1.

1.2.2 Tačke prekida funkcije i njihova klasifikacija

Prethodno, a po analogiji sa jednostranim graničnim vrednostima, definisaćemo jednostranu neprekidnost funkcije u tački oblasti definisanosti.

Definicija 1.2.5. Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}_p$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je u tački $x_0 \in (a, b)$ *neprekidna sleva* (*zdesna*) ako za $x_0 \in (a, b)$ i $x \to x_{0-}$ ($x \to x_{0+}$) postoji

$$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) \qquad \left(\lim_{x\to x_{0+}} f(x)\right)$$

i pri tome je

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0) \right).$$

Inače, umesto oznaka

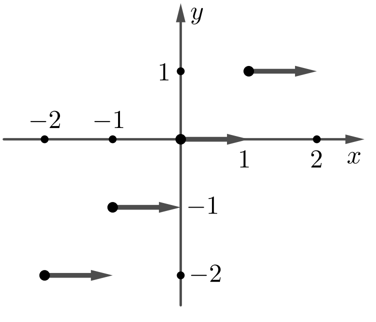
$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0) \right)$$

najčešće koristimo oznake

$$f(x_0 - 0) = f(x_{0-}) = f(x_0) \qquad \Big(f(x_0 + 0) = f(x_{0+}) = f(x_0) \Big).$$

Definicija 1.2.6. Tačku $a \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, zovemo *izolovana tačka sleva* (*zdesna*) u skupu A ako ima levu (desnu) poluokolinu $U(a_-)$ $(U(a_+))$ koja u preseku sa A ima samo tu tačku a.

Primer 1.2.2. Funkcija $f(x) = [x]$ je u celobrojnim tačkama neprekidna zdesna (Slika 1.2.2).



Slika 1.2.2

Definicija 1.2.7. Tačka $a \in A$ je *izolovana tačka* ako i samo ako je izolovana i sleva i zdesna. Za tačke u skupu A koje su izolovane samo sleva ili samo zdesna kažemo da su *poluizolovane*.

Primer 1.2.3. Skup $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nema izolovanih tačaka, ali ima dve poluizolovane tačke i to u tački a zdesna i u tački b sleva.

Stav 1.2.3. Ako je $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R}_p$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, i ako $x_0 \in D_f = [a, b]$ nije izolovana tačka u $[a, b]$ ni sleva ni zdesna, tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako je u njoj neprekidna i sleva i zdesna.

Dokaz. Neka je $x_0 \in D_f = [a, b]$ neizolovana ni sleva ni zdesna. Tada možemo govoriti o graničnim vrednostima $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$. Ako je f neprekidna u $x_0 \in D_f$, tj. ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

tada je

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0).$$

Obrnuto, ako je f u tački $x_0 \in D_f$ neprekidna i sleva i zdesna, tj. ako je

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0),$$

tada je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

tj. f je neprekidna u tački x_0. □

Stav 1.2.4. Ako je $x_0 \in D_f$ poluizolovana tačka, tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako je neprekidna sa one strane tačke x_0 sa koje ona nije izolovana.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_0 \in D_f$ izolovana zdesna, a ne sleva. Tada je f neprekidna u x_0 sleva, tj. imamo

$$\lim_{x \to x_{0_-}} f(x) = f(x_0),$$

te sledi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

tj. f je neprekidna u $x_0 \in D_f$.

Obrnuto je očigledno. □

Na osnovu definicije neprekidnosti funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}_p$, $D_f = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, imamo da je ista *prekidna* u tački $x_0 \in D_f = [a, b]$ ako ne postoji

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x \in D_f,$$

ili, pak, dati limes postoji, ali je različit od $f(x_0)$. Međutim, ovo ne isključuje mogućnost postojanja granične vrednosti

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x \in A,$$

za neki podskup A skupa D_f.

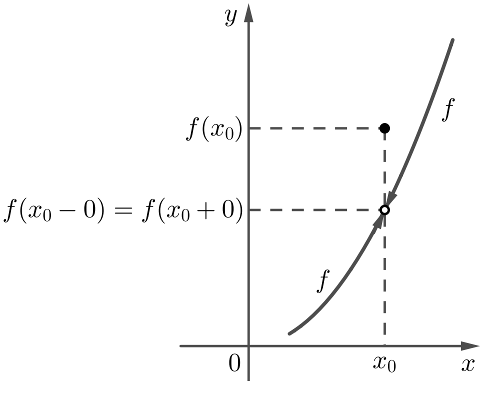
Tako, na primer, prekidna funkcija može biti neprekidna sleva ili neprekidna zdesna u zavisnosti od ispunjenosti jednog od sledeća dva uslova

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0). \tag{1.2.3}$$

Mogućnost izdvajanja takvih podskupova A skupa D_f, za koje postoji granična vrednost, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x \in A$, može biti osnova za klasifikaciju tačaka prekida, koju izlažemo u nastavku.

Definicija 1.2.8. Za tačku x_0 skupa $D_f = X$ funkcije $f : x \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je *tačka otklonjivog prekida* ako postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad A \neq f(x_0), \quad x \neq x_0.$$



Slika 1.2.3. Slika uz Definiciju 1.2.8.

Kao što sam naziv kaže, tačka prekida $x_0 \in D_f$ oblasti definisanosti funkcije f može se "popraviti" uvođenjem nove funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

Dakle, na ovaj način dobijamo da je

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A = f_1(x_0),$$

tj. funkcija f_1 je neprekidna u tački $x_0 \in D_f$. Na ovaj način smo izmenom vrednosti funkcije f u tački x_0 uklonili prekid.

Primer 1.2.4. Tačka $x_0 = 0$ je tačka otklonjivog prekida funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Kako je

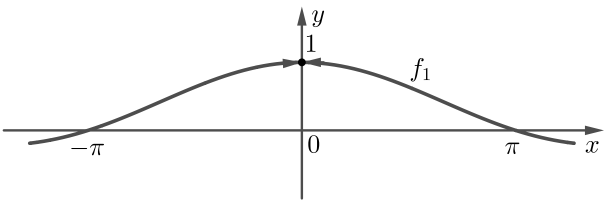
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0, \quad x \neq 0,$$

to je $x_0 = 0$ otklonjiv prekid, jer je $A = 1 \neq f(0) = 0$.

U ovom slučaju, radi otklanjanja prekida, dovoljno je uzeti

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Na Slici 1.2.4 je prikazan deo grafika funkcije $f_1(x)$.



Slika 1.2.4

Definicija 1.2.9. Za tačku x_0 skupa $D_f = X$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je *tačka prekida prve vrste* ako postoje konačne granične vrednosti

$$f(x_{0-}) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x)$$

i

$$f(x_{0+}) = \lim_{x\to x_{0+}} f(x),$$

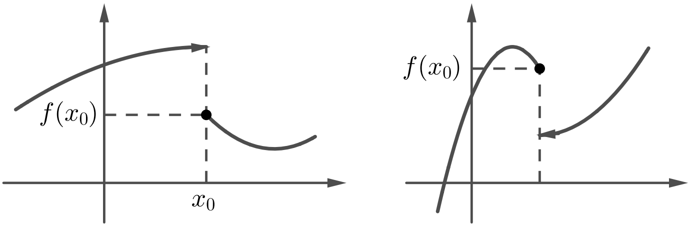
odnosno, redom, leva i desna granična vrednost funkcije f u tački x_0, i pri tome je

$$f(x_{0-}) \neq f(x_{0+}).$$

Specijalno, ako je

$$f(x_{0-}) = f(x_0) \qquad \Big(f(x_{0+}) = f(x_0)\Big),$$

tada za funkciju f kažemo da je u tački x_0 *neprekidna sleva* (*zdesna*). Na Slici 1.2.5 prikazani su grafici funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, koji imaju prekid prve vrste.

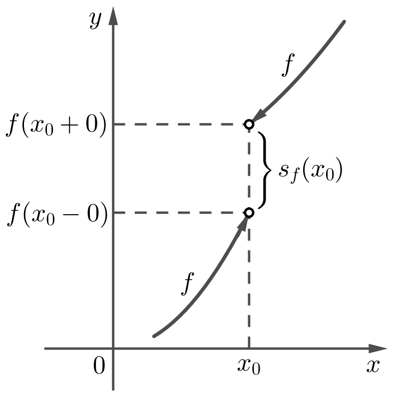


Slika 1.2.5

Istaknimo da, kada su $f(x_{0-})$ i $f(x_{0+})$ konačni i različiti, tada njihovu razliku, u oznaci s_f,

$$s_f = f(x_{0+}) - f(x_{0-}),$$

zovemo *skok funkcije* f u tački $x_0 \in D_f$ (Slika 1.2.6).



Slika 1.2.6

Definicija 1.2.10. Ako je $x_0 \in D_f$, $D_f \subset X$, ma koja tačka prekida funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, tada za $x_0 \in D_f$ kažemo da je *tačka prekida druge vrste* ako x_0 nije ni otklonjiv prekid ni prekid prve vrste.

Iz ove definicije i definicija za oklonjiv prekid i prekid prve vrste sledi:

Tačka $x_0 \in D_f$ je tačka prekida druge vrste funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $D_f \subset X$, ako najmanje ne postoji ili je beskonačna jedna od graničnih vrednosti

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x), \quad \lim_{x \to x_{0+}} f(x), \quad x \in D_f.$$