UNIVERZITET U BEOGRADU

Josif Vuković
Milivoje Simonović
Aleksandar Obradović
Saša Marković

ZBIRKA ZADATAKA IZ DINAMIKE

Mašinski fakultet
Beograd, 2014.

UNIVERZITET U BEOGRADU

Josif Vuković
Milivoje Simonović
Aleksandar Obradović
Saša Marković

ZBIRKA ZADATAKA IZ DINAMIKE

Mašinski fakultet
Beograd, 2014.

Prof. dr Josif Vuković
Prof. dr Milivoje Simonović
Prof. dr Aleksandar Obradović
Doc. dr Saša Marković

ZBIRKA ZADATAKA IZ DINAMIKE
V izdanje

Recenzenti:
Prof. dr Nikola Mladenović
Prof. dr Mirko Pavišić

Izdavač:
MAŠINSKI FAKULTET
ul. Kraljice Marije 16, 11020 Beograd
tel: 011 3370 760
faks: 011 3370 364

Za izdavača:
Prof. dr Milorad Milovančević , dekan

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Milosav Ognjanović

Odobreno za štampu odlukom dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu, br. 260/14 од 23.01.2014.

Tiraž:
400 primeraka

Štampa:
PLANETA PRINT
Ruzveltova 10, Beograd
tel/faks: 011 3088 129

ISBN 978-86-7083-815-4

Predgovor

Ova zbirka urađena je u skladu sa programima predmeta *Mehanika III* i *Mehanika IV* na Mašinskom fakultetu u Beogradu i predstavlja pomoćno sredstvo za sticanje znanja iz dinamike na tehničkim fakultetima i višim školama. Kao osnov za ovu zbirku poslužile su prethodno objavljene zbirke od istih autora (*Zbirka zadataka iz dinamike tačke* i *Zbirka zadataka iz dinamike sistema*).

Višegodišnje iskustvo u radu sa studentima poslužilo je autorima u pokušaju da kod korisnika ove zbirke razviju smisao za što jednostavniju primenu stečenih teorijskih znanja prilikom rešavanja praktičnih problema. U tom smislu izvršen je izbor zadataka i njihova sistematizacija po poglavljima i u okviru samih poglavlja. Pored većine zadataka, koje su autori sami postavili, jedan deo čine delimično izmenjeni i sadržajno obogaćeni zadaci sa ispita i vežbi na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Jedan manji deo karakterističnih zadataka preuzet je iz drugih zbirki i prerađen u skladu sa osnovnom namenom ove zbirke. Svi zadaci u zbirci su rešeni. U svakom poglavlju je dat detaljan postupak rešavanja jednog dela zadataka. Za ostale zadatke je ukratko naznačen metod rešavanja ili je dato samo krajnje rešenje do kojeg korisnik zbirke treba samostalno da dođe.

Dugujemo zahvalnost svima koji su svojim predlozima i primedbama uticali da se na vreme izbegnu neki mogući nedostaci i time doprineli kvalitetu ove zbirke.

*

U vreme priprema ove knjige za štampu tragično je preminuo jedan od autora, naš prijatelj i kolega prof. dr **Milivoje Simonović.** Njegovo zalaganje i veliki trud koji je uložio u izradu zbirke obavezali su nas i dodatno motivisali da ovaj posao dovršimo što kvalitetnije. Zato je ova zbirka, istovremeno, i skromni izraz našeg velikog poštovanja prema plemenitom liku i delu prof. Simonovića.

U Beogradu,   *A u t o r i*
2001. godine

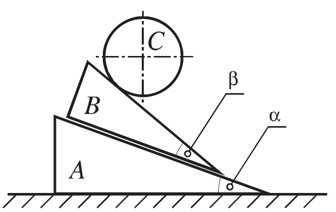
Sadržaj

Dinamika tačke

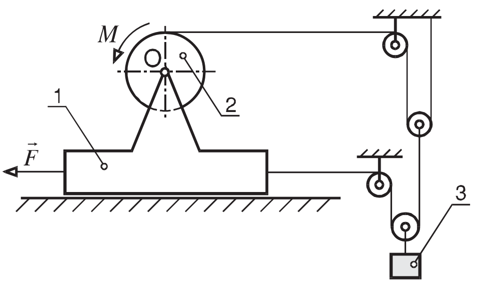
Dinamika sistema

14 Opšta jednačina dinamike. Lagranževe jednačine druge vrste

14.1 Po nepokretnoj glatkoj strmoj ravni A klizi bez trenja prizma B mase M a po prizmi se kotrlja bez klizanja homogeni valjak C mase m. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.



Slika 14.1



Slika 14.2

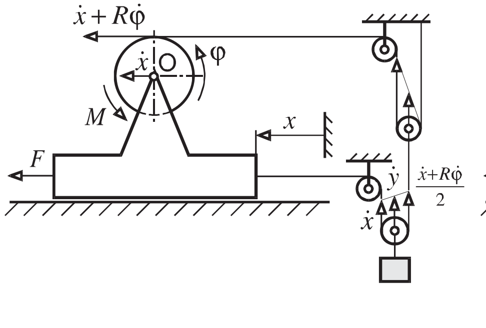
® Ako za generalisane koordinate izaberemo x (translatorno pomeranje prizme B niz nagnutu stranu prizme A) i η (translatorno pomeranje centra cilindra C niz kosinu prizme B), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$(M+m)\ddot{x}+m\ddot{\eta}\cos\beta=(M+m)g\sin\alpha,$$

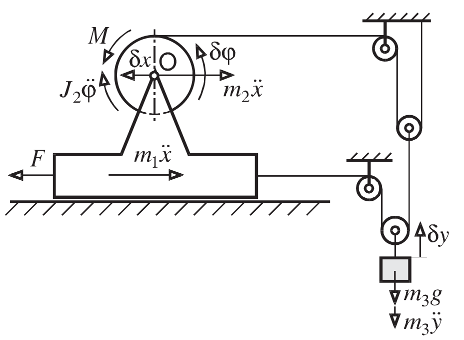
$$m\ddot{x}\cos\beta+\frac{3}{2}m\ddot{\eta}=mg\sin(\alpha+\beta).$$

14.2 Na glatkoj horizontalnoj ravni leži telo 1 mase m_1 za koje je pričvršćena osovina O oko koje može da se obrće doboš 2 mase m_2 i poluprečnika R. Pomoću sistema užadi i koturova zanemarljive mase tela 1 i 2 su spojena sa teretom 3 mase m_3 kao što je prikazano na crtežu. Ako na telo 1 deluje horizontalna sila F a na telo 2 spreg sila momenta M=FR, odrediti intenzitet sile F tako da se telo 1 kreće konstantnom brzinom. Doboš smatrati homogenim valjkom.

® Za generalisane koordinate izabraćemo x (translatorno pomeranje tela 1) i y (vertikalno pomeranje tega 3).



Slika 14.2a



Slika 14.2b

Kinetička energija sistema je:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_0\omega_0^2+\frac{1}{2}m_3\dot{y}^2,$$

gde su moment inercije J_0 i ugaona brzina doboša ω_0:

$$J_0=\frac{1}{2}m_2R^2,\omega_0=\dot{\varphi}=\frac{4\dot{y}-3\dot{x}}{R}.$$

U razvijenom obliku, izraz za kinetičku energiju sistema glasi:

$$T=\frac{1}{2}(m_1+\frac{11}{2}m_2)\dot{x}^2-6m_2\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}(m_3+8m_2)\dot{y}^2. \qquad (1)$$

Virtuelni rad sila koje deluju na materijalni sistem dat je izrazom:

$$\delta\mathbf{A}=-m_3g\delta y+M\delta\varphi+F\delta x.$$

Pošto je:

$$\delta\varphi=\frac{4\delta y-3\delta x}{R},\ M=FR,$$

sledi da je:

$$\delta\mathbf{A}=(-2F)\delta x+(4F-m_3g)\delta y,$$

tako da su generalisane sile:

$$Q_x=-2F,\ Q_y=4F-m_3g. \qquad (2)$$

Lagranževe jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y,$$

korišćenjem izraza za kinetičku energiju (1) i generalisane sile (2), dobijaju oblik:

$$(m_1+\frac{11}{2}m_2)\ddot{x}-6m_2\ddot{y}=-2F,\ -6m_2\ddot{x}+(m_3+8m_2)\ddot{y}=4F-m_3g.$$

Postavljanjem uslova da se telo 1 kreće konstantnom brzinom ($\ddot{x}=0$) sledi da je:

$$F=\frac{3m_2m_3}{4m_2-m_3}g.$$

Pokažimo da se do istog rešenja može doći i primenom opšte jednačine dinamike, izračunavanjem virtuelnog rada svih spoljašnjih, unutrašnjih i inercijalnih sila. Pri tome ćemo za generalisane koordinate izabrati x (translatorno pomeranje tela 1) i φ (ugao obrtanja doboša 2):

$$\delta\mathbf{A}^* = F\delta x + M\delta\varphi - m_3 g\delta y - m_1\ddot{x}\delta x - m_2\ddot{x}\delta x - J_0\ddot{\varphi}\delta\varphi - m_3\ddot{y}\delta y.$$

Pošto je:

$$\dot{y} = \frac{3\dot{x} + R\dot{\varphi}}{4}, \quad \ddot{y} = \frac{3\ddot{x} + R\ddot{\varphi}}{4}, \quad \delta y = \frac{3\delta x + R\delta\varphi}{4},$$

sledi da je:

$$\delta\mathbf{A}^* = \delta x[F - \frac{3}{4}m_3 g - (m_1 + m_2 + \frac{9}{16}m_3)\ddot{x} - \frac{3}{16}m_3 R\ddot{\varphi}] +$$

$$+ \delta\varphi[FR - \frac{1}{4}m_3 gR - \frac{3}{16}m_3 R\ddot{x} - (\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{16}m_3)R^2\ddot{\varphi}].$$

Pošto je, prema opštoj jednačini dinamike,

$$\delta\mathbf{A}^* = 0,$$

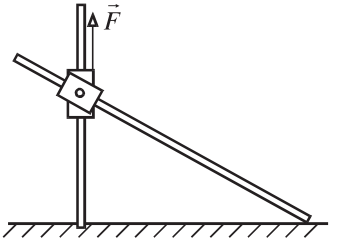
a varijacije δx, $\delta\varphi$ su nezavisne, sledi da su diferencijalne jednačine kretanja sistema:

$$F - \frac{3}{4}m_3 g - (m_1 + m_2 + \frac{9}{16}m_3)\ddot{x} - \frac{3}{16}m_3 R\ddot{\varphi} = 0,$$

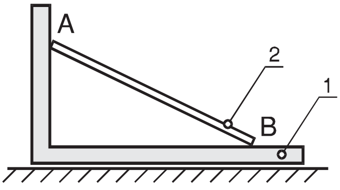
$$FR - \frac{1}{4}m_3 gR - \frac{3}{16}m_3 R\ddot{x} - (\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{16}m_3)R^2\ddot{\varphi} = 0.$$

Postavljanjem uslova da se telo 1 kreće konstantnom brzinom ($\ddot{x} = 0$) sledi da je:

$$F = \frac{3m_2 m_3}{4m_2 - m_3} g.$$



Slika 14.3



Slika 14.4

14.3 Klizač zanemarljive mase može da klizi po vertikalnoj glatkoj vođici. Za klizač je vezana obrtna vođica kroz koju može da klizi bez trenja štap dužine $2l$ i mase m. Štap se jednim krajem naslanja na glatku horizontalnu ravan. Napisati diferencijalne jednačine kretanja štapa ako na klizač deluje vertikalna sila F.

® Ako za generalisane koordinate izaberemo x (rastojanje centra mase pokretnog štapa od centra obrtne vođice) i φ (ugao koji pokretni štap gradi sa vertikalom), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$m\ddot{x}\sin^2\varphi + mx\ddot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 2m\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - mx\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi = F\cos\varphi,$$

$$mx\ddot{x}\sin\varphi\cos\varphi + m\ddot{\varphi}(l^2\sin^2\varphi + x^2\cos^2\varphi + l^2/3) + 2mx\dot{x}\dot{\varphi}\cos^2\varphi +$$

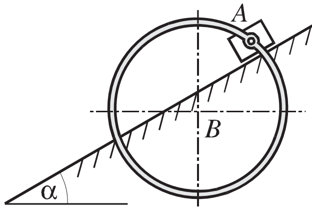
$$+ m(l^2 - x^2)\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi = mgl\sin\varphi - F(l+x)\sin\varphi.$$

14.4 Sistem se sastoji od tela 1 mase M i homogenog štapa 2 mase m i dužine l. Telo 1 klizi po glatkoj horizontalnoj ravni a štap 2 krajem A po vertikalnoj i krajem B po glatkoj horizontalnoj površi tela 1. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

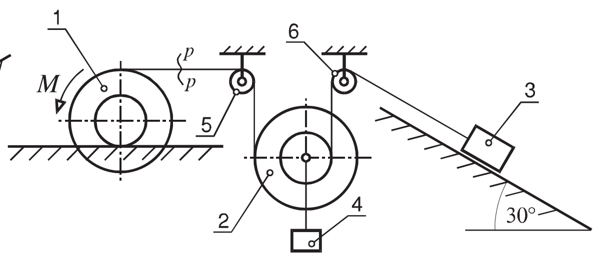
® Ako se za generalisane kooordinate izaberu x (translatorno pomeranje prizme sleva udesno) i φ (ugao koji štap gradi sa vertikalom), diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2}ml\ddot{x}\cos\varphi + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = \frac{mgl}{2}\sin\varphi.$$



Slika 14.5



Slika 14.6

14.5 Za teret mase m_1 koji može da klizi bez trenja po strmoj ravni nagiba α zglobom je vezan tanki homogeni prsten mase m_2 poluprečnika R. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

® Ako se za generalisane kooordinate izaberu x (translatorno pomeranje klizača A niz strmu ravan) i φ (ugao koji pravac AB gradi sa vertikalom), diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik:

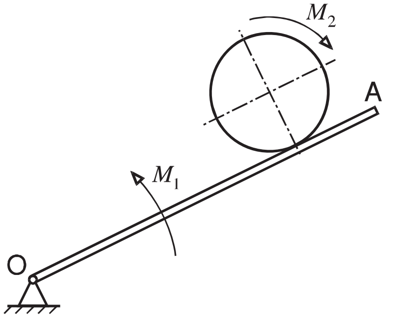
$$(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2R\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) - m_2R\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) = (m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$m_2R\ddot{x}\cos(\alpha+\varphi) + 2m_2R^2\ddot{\varphi} = -m_2gR\sin\varphi.$$

14.6 Tela 1 i 2 masa $m_1 = m_2 = 4m$ sastoje se od koaksijalnih cilindara poluprečnika R i $2R$. Poluprečnici inercije u odnosu na uzdužne ose simetrije tela su $i_1 = i_2 = R\sqrt{2}$. Telo 3 mase m kreće se niz strmu ravan nagiba $\alpha = 30°$, a telo 4 mase m obešeno je za središnu osu tela 2. Tela su međusobno vezana užadima i idealnim koturovima 5 i 6 zanemarljivih masa (videti sliku).

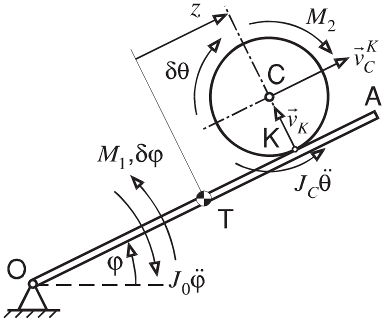
Koeficijent trenja između tela 3 i strme ravni je $\mu = \sqrt{3}/2$. Na telo 1 koje se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni deluje spreg momenta M=$4mgR$. Odrediti ubrzanje tela 3 i 4 kao i silu u užetu u preseku *p-p* naznačenom na slici.

® $a_3 = \dfrac{1067}{1228} g$ (uz strmu ravan), $a_4 = \dfrac{183}{307} g$ (vertikalno naniže), $S = \dfrac{430}{307} mg$.

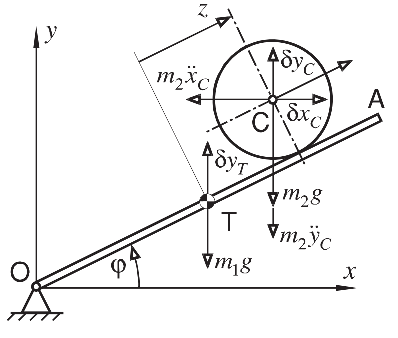


Slika 14.7

14.7 Sistem prikazan slikom kreće se u vertikalnoj ravni. Na štap OA dužine $2l$ i mase m_1 koji može da se obrće oko horizontalne ose O deluje spreg momenta M_1. Na homogeni disk mase m_2 i poluprečnika R koji može da se kotrlja bez klizanja po štapu OA deluje spreg momenta M_2. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.



Slika 14.7a



Slika 14.7b

® Za generalisane kooridnate ćemo izabrati ugao φ i pomeranje z (slika 14.7a). Kinetička energija materijalnog sistema data je izrazom:

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2.$$

Pošto je:

$$J_0 = \frac{1}{3}m_1(2l)^2,\ J_C = \frac{1}{2}m_2R^2,\ \dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{R} - \dot{\varphi},$$

$$v_C^2 = v_K^2 + (v_C^K)^2 = (l+z)^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 = (l+z)^2\dot{\varphi}^2 + (\dot{z} - R\dot{\varphi})^2,$$

sledi da se izraz za kinetičku energiju može napisati u obliku:

$$T=\frac{1}{2}[\frac{4}{3}m_1l^2+m_2(l+z)^2+\frac{3}{2}m_2R^2]\dot{\varphi}^2-\frac{3}{2}m_2R\dot{z}\dot{\varphi}+\frac{3}{4}m_2\dot{z}^2. \qquad (1)$$

Deo generalisanih sila koji potiče od konzervativne sile teže može se izračunati iz izraza za potencijalnu energiju:

$$E_p=m_1gy_T+m_2gy_C.$$

Pošto je:

$$y_T=l\sin\varphi,\ \ y_C=(l+z)\sin\varphi+R\cos\varphi,$$

sledi da je:

$$E_p=m_1gl\sin\varphi+m_2g[(l+z)\sin\varphi+R\cos\varphi].$$

Generalisane konzervativne sile su:

$$Q_\varphi^\Pi=-\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=-m_1gl\cos\varphi-m_2g(l+z)\cos\varphi+m_2gR\sin\varphi,$$

$$Q_z^\Pi=-\frac{\partial E_p}{\partial z}=-m_2g\sin\varphi.$$

Virtuelni rad nekonzervativnih sila je:

$$\delta\mathbf{A}=M_1\delta\varphi+M_2\delta\theta=M_1\delta\varphi+M_2(\frac{\delta z}{R}-\delta\varphi),$$

tako da su generalisane nekonzervativne sile:

$$Q_\varphi^N=M_1-M_2,\ \ Q_z^N=\frac{M_2}{R}.$$

Ukupne generalisane sile su:

$$\begin{aligned}Q_\varphi&=Q_\varphi^\Pi+Q_\varphi^N=M_1-M_2-m_1gl\cos\varphi-m_2g(l+z)\cos\varphi+m_2gR\sin\varphi,\\ Q_z&=Q_z^\Pi+Q_z^N=\frac{M_2}{R}-m_2g\sin\varphi.\end{aligned} \qquad (2)$$

Primenom Lagranževih jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z,$$

i korišćenjem izraza za kinetičku energiju (1) i generalisane sile (2) dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja sistema:

$$\begin{aligned}&[\frac{4}{3}m_1l^2+m_2(l+z)^2+\frac{3}{2}m_2R^2]\ddot{\varphi}-\frac{3}{2}m_2R\ddot{z}+2m_2(l+z)\dot{\varphi}\dot{z}=\\ &\qquad=M_1-M_2-m_1gl\cos\varphi-m_2g(l+z)\cos\varphi+m_2gR\sin\varphi,\\ &-\frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}m_2\ddot{z}-m_2(l+z)\dot{\varphi}^2=\frac{M_2}{R}-m_2g\sin\varphi.\end{aligned} \qquad (3)$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine (3) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike. U tu svrhu ćemo odrediti virtuelni rad svih spoljašnjih, unutrašnjih i inercijalnih sila:

$$\delta\mathbf{A}^*=M_1\delta\varphi+M_2\delta\theta-m_1g\delta y_T-m_2g\delta y_C-J_0\ddot{\varphi}\delta\varphi-J_C\ddot{\theta}\delta\theta-m_2\ddot{x}_C\delta x_C-m_2\ddot{y}_C\delta y_C.$$

Pošto je:

$$\delta\theta=\frac{\delta z}{R}-\delta\varphi,\;\; \ddot{\theta}=\frac{\ddot{z}}{R}-\ddot{\varphi},\;\; y_T=l\sin\varphi,\;\; \delta y_T=l\delta\varphi\cos\varphi,$$

$$x_C=(l+z)\cos\varphi-R\sin\varphi,\;\; y_C=(l+z)\sin\varphi+R\cos\varphi,$$

$$\delta x_C=\delta z\cos\varphi-(l+z)\delta\varphi\sin\varphi-R\delta\varphi\cos\varphi,$$

$$\delta y_C=\delta z\sin\varphi+(l+z)\delta\varphi\cos\varphi-R\delta\varphi\sin\varphi,$$

$$\ddot{x}_C=\ddot{z}\cos\varphi-\dot{z}\dot{\varphi}\sin\varphi-\ddot{\varphi}(l+z)\sin\varphi-\dot{\varphi}\dot{z}\sin\varphi-\dot{\varphi}^2(l+z)\cos\varphi-$$
$$-R\ddot{\varphi}\cos\varphi+R\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$\ddot{y}_C=\ddot{z}\sin\varphi+\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi+\ddot{\varphi}(l+z)\cos\varphi+\dot{\varphi}\dot{z}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2(l+z)\sin\varphi-$$
$$-R\ddot{\varphi}\sin\varphi-R\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

sledi da je:

$$\delta\mathbf{A}^*=\delta\varphi\{[\frac{4}{3}m_1l^2+m_2(l+z)^2+\frac{3}{2}m_2R^2]\ddot{\varphi}-\frac{3}{2}m_2R\ddot{z}+2m_2(l+z)\dot{\varphi}\dot{z}-$$
$$-M_1+M_2+m_1gl\cos\varphi+m_2g(l+z)\cos\varphi-m_2gR\sin\varphi\}+$$
$$+\delta x[-\frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}m_2\ddot{z}-m_2(l+z)\dot{\varphi}^2-\frac{M_2}{R}+m_2g\sin\varphi].$$

Iz uslova da je virtuelni rad $\delta\mathbf{A}^*$ jednak nuli i da su varijacije $\delta\varphi$ i δz nezavisne dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja:

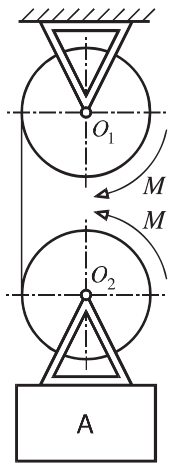
$$[\frac{4}{3}m_1l^2+m_2(l+z)^2+\frac{3}{2}m_2R^2]\ddot{\varphi}-\frac{3}{2}m_2R\ddot{z}+2m_2(l+z)\dot{\varphi}\dot{z}-$$
$$-M_1+M_2+m_1gl\cos\varphi+m_2g(l+z)\cos\varphi-m_2gR\sin\varphi=0,$$

$$-\frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}m_2\ddot{z}-m_2(l+z)\dot{\varphi}^2-\frac{M_2}{R}+m_2g\sin\varphi=0.$$

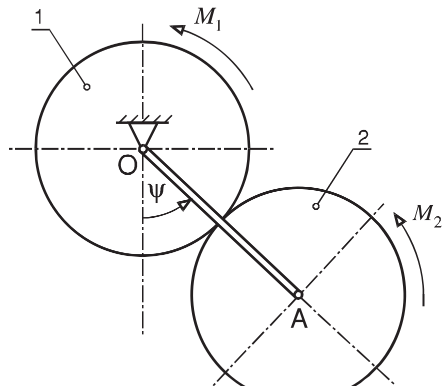
14.8 Neistegljivo uže zanemarljive mase namotano je na dva homogena valjka jednakih masa m_1 i jednakih poluprečnika R. Jedan valjak može da se obrće oko nepokretne horizontalne osovine O_2 vezane za telo A. Telo A ima masu m_2 i može da se kreće vertikalno. Ako u toku kretanja na valjke deluju spregovi jednakih momenata M odrediti ubrzanje tela A i silu u užetu.

® $a=\dfrac{4[M-(m_1+m_2)gR]}{R(5m_1+4m_2)}$ (vertikalno naviše), $S=\dfrac{(m_1+m_2)(4M+m_1gR)}{R(5m_1+4m_2)}$.

14.9 Zupčanik 1 mase m i poluprečnika R na koji deluje spreg momenta M_1 može da se obrće oko horizontalne ose u tački O. Oko iste ose, nezavisno od zupčanika 1, može da se obrće laki štap OA dužine $2R$. Za kraj štapa A zglobno je vezan zupčanik 2 mase m i poluprečnika R. Pod dejstvom sprega momenta M_2 zupčanik 2 se kotrlja po zupčaniku 1. Zupčanike smatrati homogenim diskovima. Zanemarujući trenje odrediti ugaona ubrzanja zupčanika 1 i štapa OA u zavisnosti od ugla ψ.

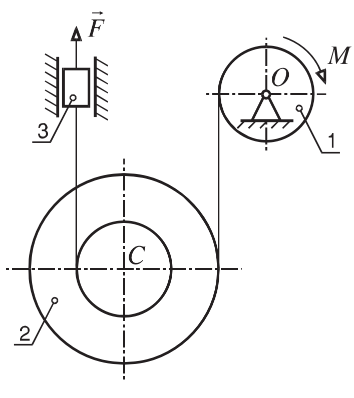


Slika 14.8

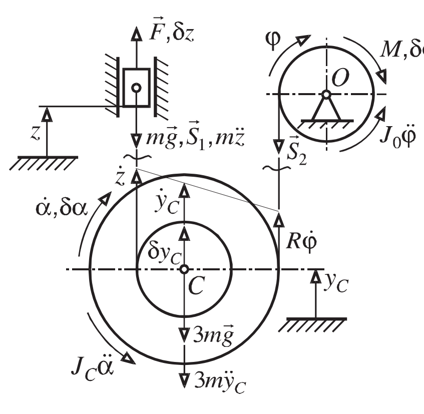


Slika 14.9

® $\varepsilon_1 = \dfrac{2}{5mR^2}(3M_1 - 2M_2 - mgR\sin\psi)$, $\varepsilon_{OA} = \ddot{\psi} = \dfrac{1}{5mR^2}(M_1 + M_2 - 2mgR\sin\psi)$, u pozitivnom matematičkom smeru.



Slika 14.10



Slika 14.10a

14.10 Homogeni disk 1 mase m i poluprečnika R može da se obrće oko središne horizontalne ose Oz. Neistegljivo uže namotano je jednim krajem na disk 1 a drugim krajem na veći doboš kalema 2. Na manji doboš kalema namotano je drugo neistegljivo uže vezano za telo 3 mase m koje može da se kreće vertikalno. Kalem ima masu $3m$, poluprečnike $2R$ i R, i poluprečnik inercije u odnosu na središnu uzdužnu osu $i = R\sqrt{2}$. Nenamotani delovi užeta su vertikalnog pravca. Sila kidanja užadi iznosi $5mg$. Odrediti vrednosti momenta sprega M koji deluje na disk 1 i sile F koja deluje vertikalno na telo 3 da ne dođe do kidanja užadi.

® Za generalisane koordinate izabraćemo φ (ugao obrtanja diska 1) i z (pomeranje klizača vertikano naviše). Kinetička enerija sistema je:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(3m)v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2.$$

Pošto je:

$$J_C = m_C i_C^2 = 6mR^2,\ \omega_C = \dot{\alpha} = \frac{\dot{z} - R\dot{\varphi}}{3R},\ v_C = \dot{y}_C = R\dot{\varphi} + 2R\omega_C = \frac{2\dot{z} + R\dot{\varphi}}{3},$$

kinetička energija sistema ima oblik:

$$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}m\dot{z}^2.$$

Virtuelni rad sila koje deluju na sistem je:

$$\delta\mathbf{A} = F\delta z + M\delta\varphi - 3mg\delta y_C - mg\delta z\,.$$

Pošto je:

$$\delta y_C = \frac{2\delta z + R\delta\varphi}{3},$$

izraz za virtuelni rad dobija sledeći oblik:

$$\delta\mathbf{A} = (M - mgR)\delta\varphi + (F - 3mg)\delta z\,,$$

tako da su generalisane sile:

$$Q_\varphi = M - mgR,\ Q_z = F - 3mg\,.$$

Polazeći od Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z\,,$$

dobićemo diferencijalne jednačine kretanja:

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - mgR,\ 3m\ddot{z} = F - 3mg. \qquad (1)$$

Diferencijalna jednačina kretanja klizača 3 je:

$$m\ddot{z} = F - S_1 - mg\,.$$

Iz ove jednačine i druge od dve diferencijalne jednačine kretanja sistema (1), sledi:

$$S_1 = \frac{2F}{3}.$$

Na osnovu vrednosti sile kidanja, dobija se:

$$S_1 < 5mg \Rightarrow F < 15mg/2\,.$$

Diferencijalna jednačina obrtanja diska 3 glasi:

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - S_2 R\,.$$

Iz poslednje jednačine i prve od dve diferencijalne jednačine kretanja sistema (1), sledi:

$$S_2 = \frac{2M}{3R} + \frac{1}{3}mg.$$

Na osnovu vrednosti sile kidanja dobija se:

$$S_2 < 5mg \;\Rightarrow\; M < 7mgR\,.$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine (1) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta \mathbf{A}^* = F\delta z - mg\delta z - m\ddot{z}\delta z - (3mg)\delta y_C - (3m)\ddot{y}_C\delta y_C - J_C\ddot{\alpha}\delta\alpha + M\delta\varphi - J_0\ddot{\varphi}\delta\varphi = 0\,.$$

Pošto je:

$$\delta y_C = \frac{R\delta\varphi + 2\delta z}{3},\; \ddot{y}_C = \frac{R\ddot{\varphi} + 2\ddot{z}}{3},\; J_C = 6mR^2,\; J_0 = \frac{1}{2}mR^2,$$

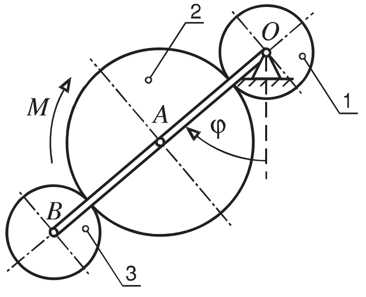
$$\delta\alpha = \frac{R\delta\varphi - \delta z}{3R},\; \ddot{\alpha} = \frac{R\ddot{\varphi} - \ddot{z}}{3R},$$

dobija se, nakon uprošćavanja:

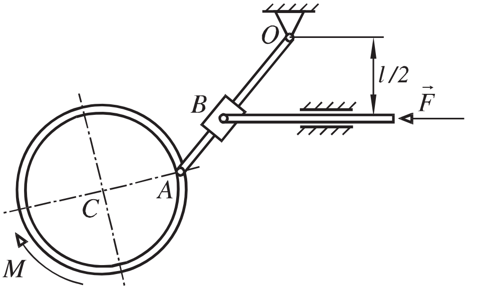
$$\delta \mathbf{A}^* = (M - mgR - \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi})\delta\varphi + (F - 3mg - 3m\ddot{z})\delta z = 0\,.$$

Iz uslova nezavisnosti varijacija $\delta\varphi$ i δz dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja:

$$M - mgR - \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = 0,\; F - 3mg - 3m\ddot{z} = 0\,.$$



Slika 14.11



Slika 14.12

14.11 Tri spregnuta homogena zupčanika masa $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 4m$ i poluprečnika $r_1 = r_3 = r$, $r_2 = 2r$ kreću se u vertikalnoj ravni posredstvom poluge *OAB* zanemarljive mase koja je zglobno vezana za centre sva tri zupčanika. Na zupčanik 2 deluje spreg momenta M=2mgr. Naći ugaono ubrzanje zupčanika 2 u zavisnosti od ugla koji poluga *OAB* gradi sa vertikalom.

® $\varepsilon_2 = \dfrac{9 - 6\sin\varphi}{52}\dfrac{g}{R}$, u negativnom matematičkom smeru.

14.12 Sistem koji se kreće u vertikalnoj ravni sastoji se od homogenog štapa *OA* dužine l i mase m_1 i homogenog tankog prstena poluprečnika R=l/2 i mase m_2. Prsten je zglobno vezan za štap u tački *A*. Na prsten deluje spreg momenta *M* a na štap *OA*, preko klizača *B* i horizontalnog štapa zanemarljivih masa, deluje sila *F*. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

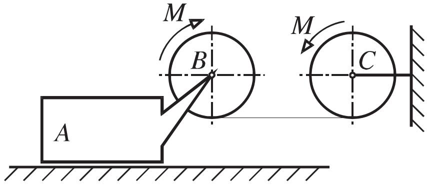
® Ako za generalisane koordinate usvojimo φ (ugao koji pravac OA gradi sa vertikalom) i θ (ugao koji pravac AC gradi sa vertikalom), diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik:

$$\frac{1}{3}(m_1+3m_2)l^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}m_2l^2\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)=$$

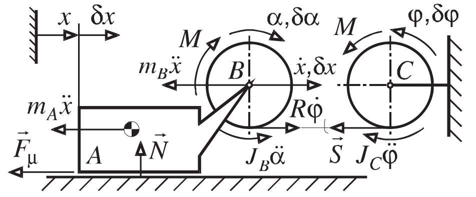
$$=\frac{Fl}{2\cos^2\varphi}-\frac{1}{2}(m_1+2m_2)gl\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{2}m_2l^2\cos(\varphi-\theta)\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}m_2l^2\ddot{\theta}-\frac{1}{2}m_2l^2\sin(\varphi-\theta)\dot{\varphi}^2=$$

$$=M-\frac{1}{2}m_2gl\sin\theta.$$



Slika 14.13



Slika 14.13a

14.13 Telo A mase $m_A=4m$ leži na hrapavoj horizontalnoj ravni. Na telu A nalazi se osovina B oko koje može da se obrće doboš na koji je namotano uže. Drugi kraj užeta namotan je na doboš koji može da se obrće oko nepokretne osovine O. Oba doboša su istih masa m i istih poluprečnika R. Na doboše deluju spregovi sila momenata M=2mgR. Koeficijent trenja između tela A i horizontalne ravni je μ=1/5. Doboše smatrati homogenim valjcima. Odrediti silu u užetu u toku kretanja sistema, ako je u početnom trenutku sistem mirovao.

® Za generalisane koordinate izabraćemo x (translatorno pomeranje tela A) i φ (ugao obrtanja diska C). Kinetička energija sistema je:

$$T=\frac{1}{2}(4m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_B\omega_B^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2.$$

Pošto je:

$$J_B=J_C=\frac{1}{2}mR^2,\ \ \omega_B=\dot{\alpha}=\frac{\dot{x}-R\dot{\varphi}}{R},$$

izraz za kinetičku energiju dobija sledeći oblik:

$$T=\frac{11}{4}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}mR\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Virtuelni rad sila koje deluju na sistem je:

$$\delta\mathbf{A}=M\delta\varphi+M\delta\alpha-F_\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}\delta x.$$

Pošto je:

$$\delta\alpha=\frac{\delta x-R\delta\varphi}{R},\ \ F_\mu=\mu N=\frac{1}{5}(5mg)=mg,\ \ M=2mgR,$$

za virtuelni rad dobija se sledeći izraz:

$$\delta \mathbf{A} = mg\delta x,$$

tako da su generalisane sile:

$$Q_\varphi = 0,\ Q_x = 2mg - mg\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}.$$

Polazeći od Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_\varphi,$$

dobijaju se sledeće diferencijalne jednačine kretanja:

$$-\frac{1}{2}mR\ddot{x} + mR^2\ddot{\varphi} = 0,\ \frac{11}{2}m\ddot{x} - \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} = 2mg - mg\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}. \qquad (1)$$

a iz njih (uz uslov $\mathrm{sgn}\,\dot{x} = 1$) i ugaono ubrzanje diska C:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{21R}.$$

Iz diferencijalne jednačine obrtanja diska C:

$$J_C\ddot{\varphi} = M - SR,$$

sada se može odrediti i vrednost sile u užetu:

$$S = \frac{41}{21}mg.$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine (1) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta \mathbf{A}^* = M\delta\varphi - J_C\ddot{\varphi}\delta\varphi - F_\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}\delta x - (4m)\ddot{x}\delta x + M\delta\alpha - m\ddot{x}\delta x - J_B\ddot{\alpha}\delta\alpha = 0.$$

Pošto je:

$$F_\mu = mg,\ \delta\alpha = \frac{\delta x - R\delta\varphi}{R},\ \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x} - R\ddot{\varphi}}{R},\ J_B = J_C = \frac{1}{2}mR^2,$$

zamenom u izraz za virtuelni rad, dobićemo:

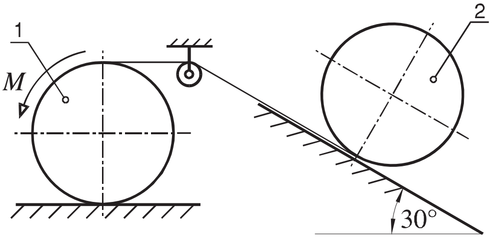
$$\delta \mathbf{A}^* = (\frac{1}{2}mR\ddot{x} - mR^2\ddot{\varphi})\delta\varphi + (2mg - mg\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} - \frac{11}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi})\delta x = 0.$$

Iz uslova nezavisnosti varijacija $\delta\varphi$ i δx dobijamo diferencijalne jednačine:

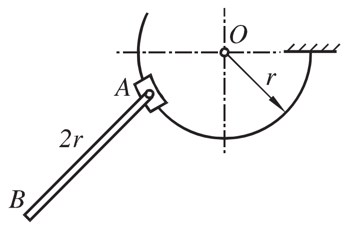
$$\frac{1}{2}mR\ddot{x} - mR^2\ddot{\varphi} = 0,$$

$$2mg - mg\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} - \frac{11}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} = 0.$$

14.14 Homogeni tanki cilindar 1 mase $2m$ poluprečnika r može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Na cilindar 1 namotano je lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko nepokretnog idealnog kotura zanemarljive mase. Drugim krajem uže je namotano na homogeni tanki cilindar 2 mase m i poluprečnika r. Cilindar 2 nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$. Odrediti silu u užetu ako na cilindar 1 u toku kretanja deluje spreg momenta M=mgr.



Slika 14.14



Slika 14.15

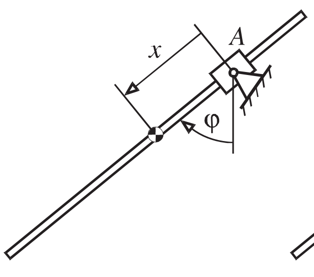
® $S = \frac{1}{3}mg$.

14.15 Klizač mase m_1 može da klizi po glatkim kružnim vođicama poluprečnika r. Za klizač je zglobom u tački A vezan štap dužine $2r$ i mase m_2. Sistem se kreće u vertikalnoj ravni. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

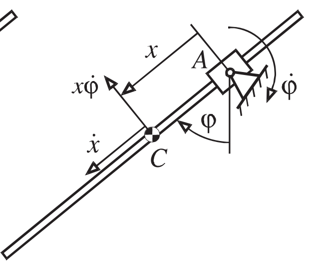
® Ako za generalisane koordinate izaberemo φ (ugao koji radijus OA gradi sa vertikalom) i θ (ugao koji štap AB gradi sa vertikalom), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$(m_1 + m_2)r^2\ddot{\varphi} + m_2 r^2\ddot{\theta}\cos(\varphi - \theta) + m_2 r^2\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) = -(m_1 + m_2)gr\sin\varphi,$$

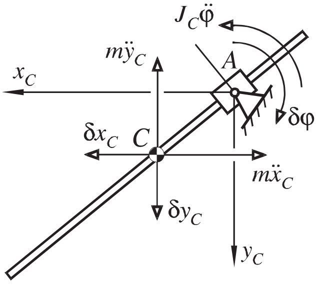
$$m_2 r^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \theta) + \frac{4}{3}m_2 r^2\ddot{\theta} - m_2 r^2\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) = -m_2 gr\sin\theta.$$



Slika 14.16



Slika 14.16a



Slika 14.16b

14.16 Homogeni štap dužine $2l$ i mase m kreće se u horizontalnoj ravni pri čemu prolazi kroz glatku obrtnu vođicu A čija se masa može zanemariti. Osa vođice Az je vertikalna. Ako su početni uslovi $x_0 = \varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = l\omega_0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$, odrediti funkciju $\dot{x}(x)$.

® Potencijalna energija sistema jednaka je nuli:

$$E_p = 0,$$

a kinetička energija je:

$$T = \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Pošto je:

$$J_C = \frac{1}{12} m (2l)^2, \; v_C^2 = x^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2,$$

sledi da je:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (\frac{l^2}{3} + x^2) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 .$$

Generalisane sile jednake su nuli:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0, \; Q_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 .$$

Korišćenjem Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x ,$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

$$\frac{d}{dt}[m(\frac{1}{3} l^2 + x^2)\dot{\varphi}] = 0, \; m\ddot{x} - m x \dot{\varphi}^2 = 0 . \quad (1)$$

Iz prve od njih sledi da je:

$$m(\frac{1}{3} l^2 + x^2)\dot{\varphi} = const = m(\frac{1}{3} l^2 + x_0^2)\dot{\varphi}_0 ,$$

odnosno:

$$\dot{\varphi} = \frac{l^2 \omega_0}{l^2 + 3x^2} .$$

Zamenom poslednjeg izraza u drugu diferencijalnu jednačinu kretanja (1), dobija se:

$$\ddot{x} = x \dot{\varphi}^2 = x \frac{(l^2 \omega_0)^2}{(l^2 + 3x^2)^2} . \quad (2)$$

S obzirom da je:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} ,$$

diferencijalna jednačina (2) dobija oblik:

$$\dot{x}\, d\dot{x} = (l^2 \omega_0)^2 \frac{x\, dx}{(l^2 + 3x^2)^2} .$$

Integracijom leve i desne strane poslednje diferencijalne jednačine, uzimajući za donje granice integracije početne uslove za promenljive po kojima se integracja vrši dobija se:

$$\int_{\dot{x}_0 = l\omega_0}^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = (l^2 \omega_0)^2 \int_{x_0 = 0}^{x} \frac{x\, dx}{(l^2 + 3x^2)^2} ,$$

i konačno rešenje:

$$\dot{x} = l\omega_0 \sqrt{\frac{l^2 + 4x^2}{l^2 + 3x^2}} .$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu dobiti i primenom opšte jednačine dinamike:

$$\delta \mathbf{A}^* = -m\ddot{x}_C \delta x_C - m\ddot{y}_C \delta y_C - J_C \ddot{\varphi} = 0 .$$

Pošto je:

$$x_C = x \sin\varphi,\ y_C = x\cos\varphi,\ J_C = \frac{1}{3} m l^2,$$

$$\delta x_C = \delta x \sin\varphi + x\delta\varphi \cos\varphi,\ \delta y_C = \delta x \cos\varphi - x\delta\varphi \sin\varphi,$$

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} \sin\varphi + 2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + x\ddot{\varphi}\cos\varphi - x\dot{\varphi}^2 \sin\varphi,$$

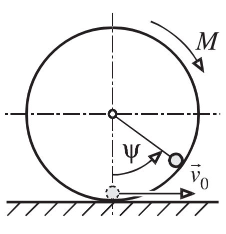
$$\ddot{y}_C = \ddot{x} \cos\varphi - 2\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - x\ddot{\varphi}\sin\varphi - x\dot{\varphi}^2 \cos\varphi,$$

sledi da je:

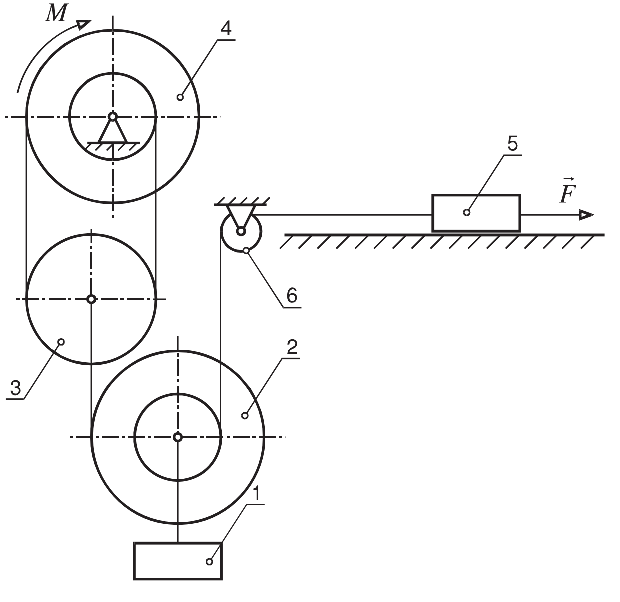
$$\delta \mathbf{A}^* = [-\ddot{\varphi}(\frac{1}{3}l^2 + x^2) - 2\dot{x}\dot{\varphi}x] m\delta\varphi + (-\ddot{x} + x\dot{\varphi}^2) m\delta x .$$

Iz uslova nezavisnosti varijacija $\delta\varphi$ i δx, dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja:

$$-m\ddot{\varphi}(\frac{1}{3}l^2 + x^2) - 2m\dot{x}\dot{\varphi}x = 0,\ -m\ddot{x} + mx\dot{\varphi}^2 = 0 .$$



Slika 14.17



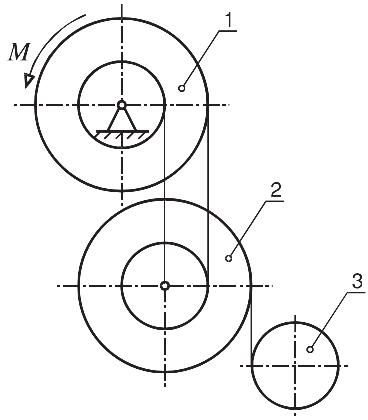
Slika 14.18

14.17 Cilindar zanemarljive mase i poluprečnika R kotrlja se po horizontalnoj ravni bez klizanja. Po unutrašnjoj površi cilindra klizi bez trenja tačka mase m. U početnom trenutku tačka je bila u najnižem položaju i imala početnu brzinu v_0. Odrediti zakon promene momenta $M(\psi)$ tako da se cilindar kotrlja konstantnom ugaonom brzinom ω_0.

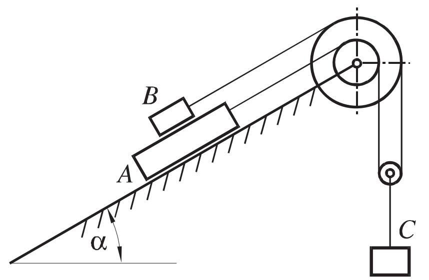
® $M = mgR[2 - 3\cos\psi - \frac{1}{gR}(v_0 - R\omega_0)^2]\sin\psi .$

14.18 Kojom silom F treba delovati na telo 5 mase m koje se kreće po glatkoj horizontalnoj podlozi da bi se teret 1 mase m kretao konstantnom brzinom. Poluprečnici koaksijalnih cilindara 2 i 4 su r i $2r$, mase su im $m_4 = 2m_2 = 2m$ a poluprečnici inercije za ose cilindara su $i_2 = i_4 = r\sqrt{2}$. Na kotur 4 deluje spreg momenta M=4mgr. Sistem se kreće u vertikalnoj ravni. Masu užadi, ostalih elemenata sistema i trenje zanemariti.

® $F = \dfrac{47}{49} mg$.



Slika 14.19



Slika 14.20

14.19 Koaksijalni kalemovi 1 i 2 sastavljeni od cilindara poluprečnika r i $2r$ imaju mase $m_1 = m_2 = 2m$ i poluprečnike inercije $i_1 = i_2 = r\sqrt{2}$. Kalemovi su međusobno vezani užadima zanemarljive mase. Kalem 1 može da se obrće oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O_1 a kalem 2 može da se kreće vertikalno. Na kalem 2 namotano je uže čiji je drugi kraj namotan na tanki cilindar 3 mase m i poluprečnika r. Ako na kalem deluje spreg momenta M=2mgr, odrediti ugaona ubrzanja sva tri tela kao i silu u užetu između tela 2 i 3.

® $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{3}{29}\dfrac{g}{r}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{10}{29}\dfrac{g}{r}$ (negativan matematički smer),

$S = \dfrac{10}{29} mg$.

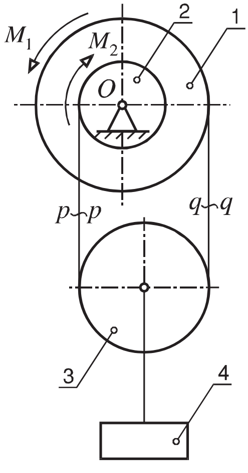
14.20 Na strmoj ravni nagiba α nalazi se ploča A mase m_A a na ploči A telo B mase m_B. Koeficijenti trenja između tela A, tela B i strme ravni su jednaki i iznose μ. Neistegljivo uže zanemarljive mase vezano je za telo A i B paralelno strmoj ravni i prebačeno preko dva kotura poluprečnika r i $2r$ koji se nezavisno jedan od drugog obrću oko nepokretne horizontalne ose. Na užetu se nalazi pokretni kotur za čije je središte vezano telo C mase m_C. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja sistema zanemarujući mase koturova.

® Ako za generalisane koordinate izaberemo x_A i x_B (apsolutna pomeranja klizača A i B uz strmu ravan, diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik:

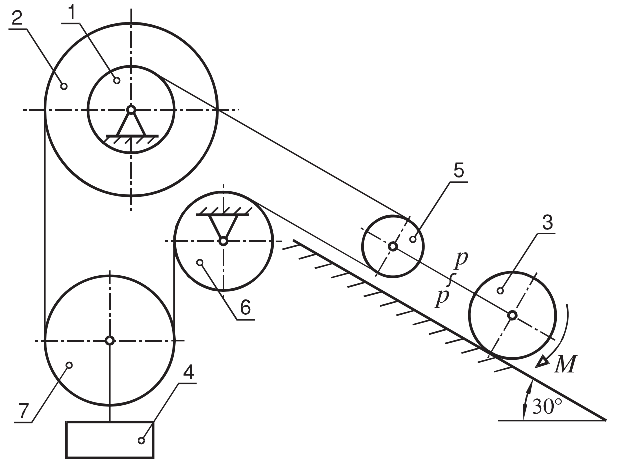
$$(m_A+\frac{1}{4}m_C)\ddot{x}_A+\frac{1}{4}m_C\ddot{x}_B=\frac{1}{2}m_C g-m_A g\sin\alpha-$$

$$-\mu g\cos\alpha[(m_A+m_B)\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_A-m_B\,\mathrm{sgn}(\dot{x}_B-\dot{x}_A)],$$

$$\frac{1}{4}m_C\ddot{x}_A+(m_B+\frac{1}{4}m_C)\ddot{x}_B=\frac{1}{2}m_C g-m_B g\sin\alpha-\mu m_B g\cos\alpha\,\mathrm{sgn}(\dot{x}_B-\dot{x}_A).$$



Slika 14.21



Slika 14.22

14.21 Homogeni kotur 2 poluprečnika $2r$, mase m i homogeni kotur 1 poluprečnika r i mase m mogu da se nezavisno jedan od drugog obrću oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O pod dejstvom spregova momenata $M_1=M_2=mgr$. Koturi su užetom zanemarljive mase povezani za homogeni kotur 3 mase m za čije je središte užetom zanemarljive mase vezan teret 4 mase $2m$. Odrediti sile u užetu u naznačenim presecima. Koture smatrati homogenim diskovima.

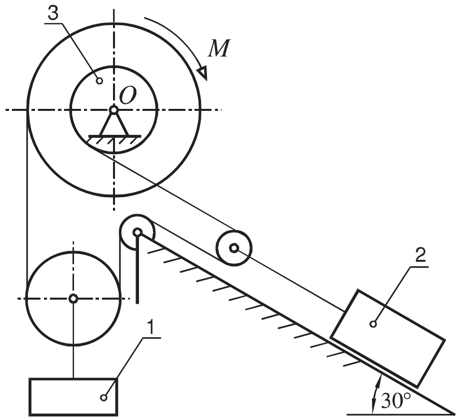
® $S_p=\dfrac{49}{48}mg,\ S_q=\dfrac{41}{48}mg.$

14.22 Kruto spojeni koaksijalni cilindri 1 i 2 imaju poluprečnike R i $2R$, ukupnu masu m i poluprečnik inercije $i=R\sqrt{2}$. Na homogeni disk 3 mase m i poluprečnika R, koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni nagnutoj u odnosu na horizontalu pod uglom $30°$, deluje spreg momenta M=$2mgR$. Masa tereta 4 je $2m$, dok se masa užadi i ostalih koturova u sistemu može se zanemariti. Odrediti silu u naznačenom preseku užeta ako se sistem kreće u vertikalnoj ravni.

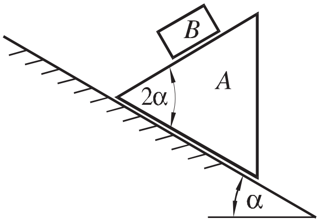
® $S=\dfrac{64}{31}mg.$

14.23 Sistem se sastoji od tela 1 mase *m*, tela 2 mase *m* i dva koaksijalna kruto spojena cilindra ukupne mase *m* i poluprečnika inercije za nepomičnu osu obrtanja $i=R$. Tela su vezana neistegljivim užetom i koturovima zanemarljive mase. Telo 2 može da klizi bez trenja po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$. Odrediti vrednost momenta *M* kojim treba delovati na telo 3 tako da se telo 1 kreće konstantnom brzinom. Poluprečnici koaksijalnih cilindara su *R* i 2*R*.

® $M = \frac{11}{6} mgR$.



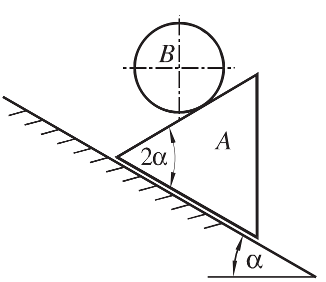
Slika 14.23



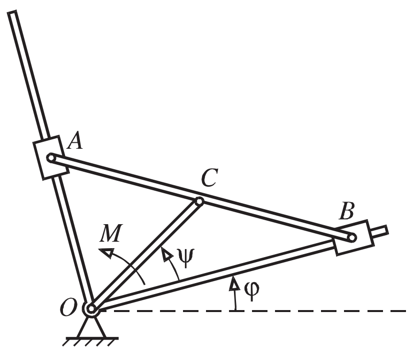
Slika 14.24

14.24 Po strmoj ravni nagiba α klizi bez trenja prizmatično telo *A* mase m_A. Po ravnoj površi tela *A* koja je u odnosu na strmu ravan nagnuta za ugao 2α klizi bez trenja telo *B* mase m_B. Odrediti ubrzanje tela *A*.

® $a = \frac{m_A + m_B(1+\cos 2\alpha)}{m_A + m_B \sin^2 2\alpha} g \sin\alpha$, niz strmu ravan.



Slika 14.25

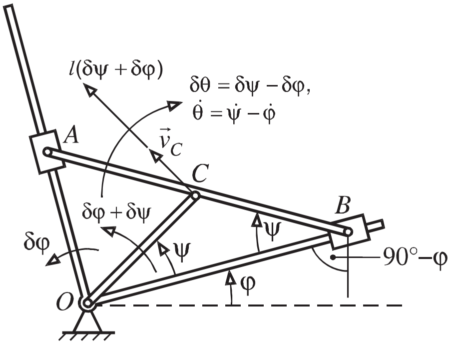


Slika 14.26

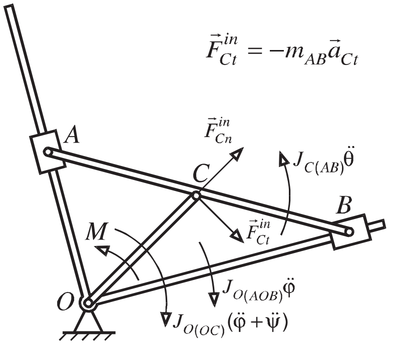
14.25 Rešiti prethodni zadatak ako se umesto tela *B* po prizmi *A* kotrlja bez klizanja homogeni valjak mase m_B.

® $a = \dfrac{3m_A + m_B(3+2\cos 2\alpha)}{3m_A + m_B(3-2\cos^2 2\alpha)} g \sin\alpha$, niz strmu ravan.

14.26 Sistem koji se kreće u horizontalnoj ravni sastoji se od pravouglog ugaonika čiji su kraci homogeni štapovi jednakih dužina $2l$ i jednakih masa $2m$, homogenog štapa AB dužine $2l$ i mase $2m$ i homogenog štapa OC dužine l i mase m. Ugaonik i štap OC obrću se nezavisno jedan od drugog oko vertikalne ose Oz. Štap AB vezan je zglobno u središtu C za štap OC a svojim krajevima za klizače koji se kreću po kracima ugaonika bez trenja. U toku kretanja na štap OC deluje spreg konstantnog momenta M. Uzimajući za generalisane koordinate uglove φ i ψ (videti sliku) odrediti konačne jednačine kretanja, ako je u početnom trenutku $(t_0 = 0)$ $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0,\ \dot\varphi(t_0) = \dot\psi(t_0) = 0$.



Slika 14.26a



Slika 14.26b

® Kinetička energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2}J_{O(OC)}(\dot\varphi + \dot\psi)^2 + \frac{1}{2}J_{O(AOB)}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_{AB}v_C^2 + \frac{1}{2}J_{C(AB)}\omega_{AB}^2.$$

Pošto je:

$$J_{O(OC)} = \frac{1}{3}ml^2,\ J_{O(AOB)} = 2\cdot\frac{1}{3}(2m)(2l)^2 = \frac{16}{3}ml^2,\ m_{AB} = 2m,\ v_C = l(\dot\varphi + \dot\psi),$$

$$J_{C(AB)} = \frac{1}{12}(2m)(2l)^2,\ \ \omega_{AB} = \dot\theta = \dot\psi - \dot\varphi,$$

kinetička energija ima sledeći oblik:

$$T = ml^2[\frac{25}{6}\dot\varphi^2 + \frac{5}{3}\dot\varphi\dot\psi + \frac{3}{2}\dot\psi^2].$$

Rad vrši samo spreg sila momenta M tako da je virtuelni rad:

$$\delta\mathbf{A} = M(\delta\varphi + \delta\psi).$$

Iz poslednjeg izraza dobijaju se generalisane sile:

$$Q_\varphi = Q_\psi = M.$$

Korišćenjem Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_{\psi},$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja sistema:

$$\frac{ml^2}{3}(25\ddot{\varphi}+5\ddot{\psi})=M,\quad \frac{ml^2}{3}(5\ddot{\varphi}+9\ddot{\psi})=M. \tag{1}$$

Rešavanjem gornjeg sistema od dve linearne jednačine po drugim izvodima generalisanih koordinata dobija se:

$$\ddot{\varphi}=\frac{3M}{50ml^2},\quad \ddot{\psi}=\frac{3M}{10ml^2},$$

odakle se, uzimajući u obzir i početne uslove kretanja navedene u tekstu zadatka, mogu izvesti i konačne jednačine kretanja sistema:

$$\varphi=\frac{3M}{100ml^2}t^2,\quad \psi=\frac{3M}{20ml^2}t^2.$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta \mathbf{A}^*=M(\delta\varphi+\delta\psi)-J_{O(AOB)}\ddot{\varphi}\delta\varphi-J_{O(OC)}(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi})(\delta\varphi+\delta\psi)-$$

$$-F_{Ct}^{in}l(\delta\varphi+\delta\psi)-J_{C(AB)}\ddot{\theta}\delta\theta=0.$$

Pošto je:

$$J_{O(AOB)}=\frac{16}{3}ml^2,\quad J_{O(OC)}=\frac{1}{3}ml^2,\quad F_{Ct}^{in}=m_C a_{Ct}=2ml(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}),\quad J_{C(AB)}=\frac{2}{3}ml^2,$$

$$\ddot{\theta}=\ddot{\psi}-\ddot{\varphi}, \delta\theta=\delta\psi-\delta\varphi,$$

sledi da je:

$$\delta \mathbf{A}^*=\delta\varphi[M-\frac{ml^2}{3}(25\ddot{\varphi}+5\ddot{\psi})]+\delta\psi[M-\frac{ml^2}{3}(5\ddot{\varphi}+9\ddot{\psi})]=0.$$

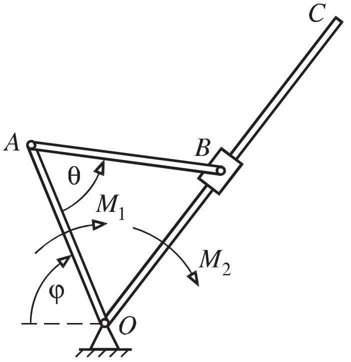
Iz uslova nezavisnosti varijacija $\delta\varphi$ i $\delta\psi$, dobijaju se diferencijalne jednačine:

$$M-\frac{ml^2}{3}(25\ddot{\varphi}+5\ddot{\psi})=0,\quad M-\frac{ml^2}{3}(5\ddot{\varphi}+9\ddot{\psi})=0.$$

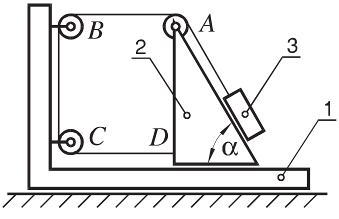
14.27 Sistem koji se kreće u horizontalnoj ravni sastoji se od homogenih štapova OA i AB jednakih dužina l i jednakih masa m, i homogenog štapa OC dužine $2l$ i mase $2m$. Štapovi OA i OC obrću se nezavisno jedan od drugog oko vertikalne ose Oz. Štap AB vezan je zglobno za štap OA i za klizač zanemarljive mase koji klizi bez trenja po štapu OC. Na štap OA deluje spreg momenta M_1 a na štap OC spreg momenta M_2. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema uzimajući za generalisane koordinate uglove φ i θ.

® $$ml^2[(\frac{13}{3}-\cos\theta)\ddot{\varphi}+(\frac{-5}{3}+\frac{1}{2}\cos\theta)\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta-\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta]=M_1+M_2,$$

$$ml^2[(\frac{-5}{3}+\frac{1}{2}\cos\theta)\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}-\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin\theta]=-\frac{1}{2}M_2.$$



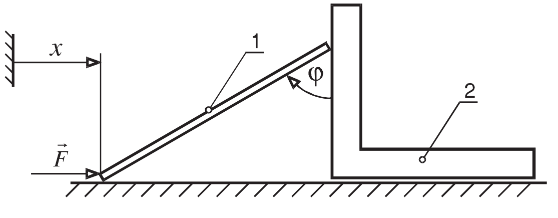
Slika 14.27



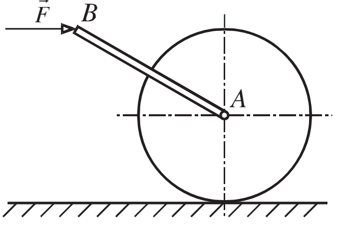
Slika 14.28

14.28 Materijalni sistem sastoji se od tela 1, 2 i 3 masa m_1, m_2 i m_3, koturova A, B i C zanemarljivih masa i užeta zanemarljive mase. Jedan kraj užeta vezan je za telo 2 a drugi za telo 3. Delovi užeta između kotura A i B i kotura C i D su horizontalni. Telo 1 klizi po glatkoj horizontalnoj podlozi, telo 2 po glatkom kraku tela 1 a telo 3 po glatkoj strani tela 2 nagnutoj pod uglom $\alpha = 60°$ prema horizontali. Ako je $m_1 = 2m_2 = 2m_3 = 2m$, odrediti intenzitet apsolutnog ubrzanja tela 3.

® $a_3 = \dfrac{\sqrt{147}}{15} g$.



Slika 14.29



Slika 14.30

14.29 Sistem koji se sastoji od homogenog štapa mase m_1 i dužine $2b$ i tela 2 mase m_2 može da se kreće u vertikalnoj ravni. Ako je sila F horizontalnog pravca, kao što je na slici prikazano, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema za date generalisane koordinate. Trenje zanemariti.

® $(m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + 2m_2)b\ddot{\varphi}\cos\varphi - (m_1 + 2m_2)b\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = F$,

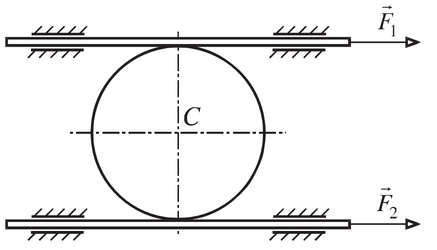
$$(m_1 + 2m_2)b\ddot{x}\cos\varphi + \frac{4}{3}b^2\ddot{\varphi}(m_1 + 3m_2\cos^2\varphi) - 2m_2 b^2\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = m_1 g b \sin\varphi .$$

14.30 Homogeni valjak mase m_1 i poluprečnika r može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Za središte cilindra zglobno je vezan homogeni štap dužine $2r$ i mase m_2 na čijem drugom kraju deluje sila F konstantnog intenziteta i horizontalnog pravca, kao što je na slici prikazano. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja sistema.

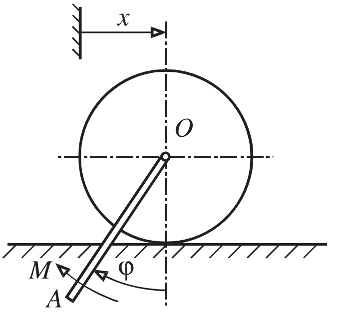
® Ako za generalisane koordinate izaberemo φ (ugao obrtanja valjka) i θ (ugao koji štap gradi sa horizontalom), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$\frac{3m_1+2m_2}{2}\ddot{\varphi}+m_2\ddot{\theta}\sin\theta+m_2\dot{\theta}^2\cos\theta=\frac{F}{r},$$

$$m_2\ddot{\varphi}\sin\theta+\frac{4}{3}m_2\ddot{\theta}=\frac{2F\sin\theta-m_2 g\cos\theta}{r}.$$



Slika 14.31



Slika 14.32

14.31 Zupčanik poluprečnika R i mase M nalazi se između paralelnih horizontalno postavljenih zupčastih letvi jednakih masa m. Na letve deluju sile F_1 i F_2. Odrediti ubrzanje središta zupčanika. Zupčanik smatrati homogenim diskom a trenje zanemariti.

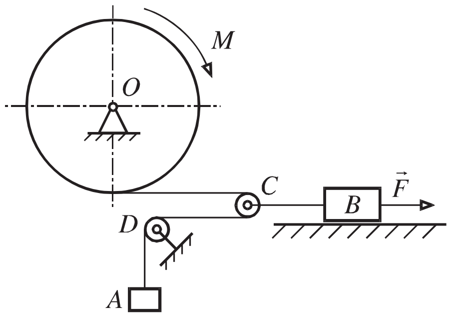
® $a=\dfrac{F_1+F_2}{M+2m}$.

14.32 Za centar homogenog valjka mase $2m$ i poluprečnika r koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni zglobno je vezan homogeni štap dužine $2r$ i mase m. Na štap deluje spreg momenta M. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja sistema u datom sistemu generalisanih koordinata.

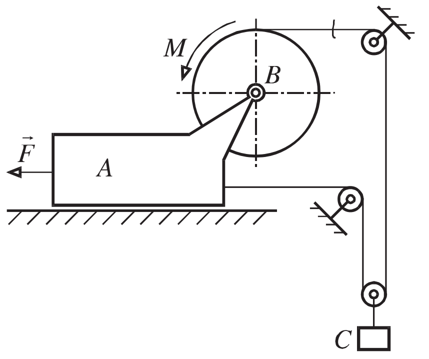
® $4m\ddot{x}-mr\ddot{\varphi}\cos\varphi+mr\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0,\ -mr\ddot{x}\cos\varphi+\dfrac{4}{3}mr^2\ddot{\varphi}=M-mgr\sin\varphi.$

14.33 Na homogeni valjak poluprečnika R i mase m_1 namotano je neistegljivo uže koje je prebačeno preko koturova C i D zanemarljivih masa. Kotur C je vezan za telo B mase m_2 a kotur D je nepokretan. Za drugi kraj užeta vezano je telo A mase m_3. Ako na telo B deluje sila F horizontalnog pravca, a na valjak spreg momenta M=FR, odrediti intenzitet sile F tako da kretanje tela A bude ravnomerno. Trenje zanemariti.

® $F=\dfrac{2m_1+m_2}{m_1+m_2}m_3 g$



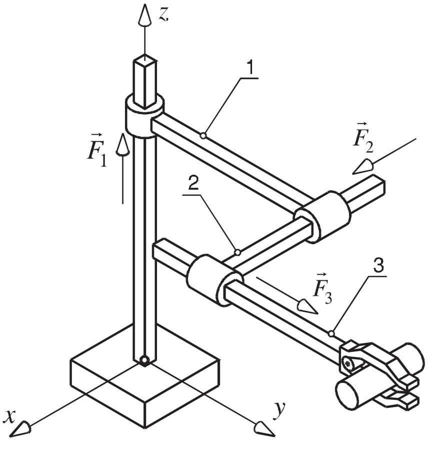
Slika 14.33



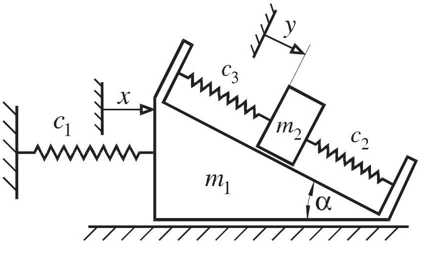
Slika 14.34

14.34 Platforma A mase $4m$ može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni. Za platformu je učvršćena horizontalna osovina B oko koje može da se obrće homogeni valjak B mase $2m$ i poluprečnika R. Pomoću sistema užadi i koturova zanemarljive mase podiže se teret C mase m. Na platformu A deluje horizontalna sila F a na valjak spreg momenta $M{=}FR$. Odrediti vrednost sile F i silu u užetu u naznačenom preseku ako se teret C kreće konstantnom brzinom.

® $F=\dfrac{5}{8}mg,\;\; S=\dfrac{1}{2}mg.$



Slika 14.35



Slika 14.36

14.35 Mehanizam manipulatora sa tri stepena slobode sastoji se od nepokretnog člana za vertikalno pomeranje i članova 1, 2 i 3 za horizontalno pomeranje. Mase pokretnih članova su m_1, m_2 i m_3, a masa tereta koji nosi hvataljka na kraju člana 3 iznosi m. Na članove deluju sile F_1, F_2 i F_3 u pravcu kliznih vođica. Napisati diferencijalne jednačine kretanje mehanizma.

® Ako za generalisane koordinate izaberemo x (translatorno pomeranje segmenta 2 u odnosu na segment 1 duž x-ose), y (translatorno pomeranje segmenta 3 u odnosu na segment 2 duž y-ose) i z (pomeranje segmenta 1 vertikalno naviše), diferencijalne jednačine kretanja glase:

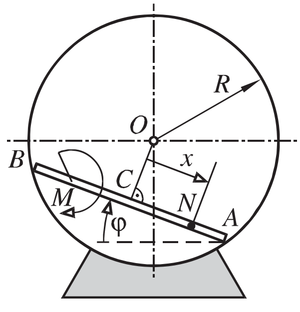
$$(m_2+m_3+m)\ddot{x}=F_2,\ (m_3+m)\ddot{y}=F_3,$$

$$(m_1+m_2+m_3+m)\ddot{z}=F_1-(m_1+m_2+m_3+m)g.$$

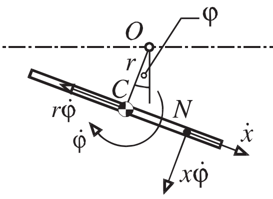
14.36 Po horizontalnoj ravni može da klizi bez trenja prizma mase m_1. Po strmoj ravni prizme nagiba α može da klizi, takođe bez trenja, telo mase m_2. Tela su povezana oprugama krutosti c_1, c_2 i c_3 (videti sliku). Uzimajući za generalisane koordinate x (pomeranje prizme duž horizontalne ravni) i y (pomeranje tela po prizmi), postaviti diferencijalne jednačine kretanja ako su, u položaju x=y=0 opruge nenapregnute.

® $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2\ddot{y}\cos\alpha=-c_1x,$

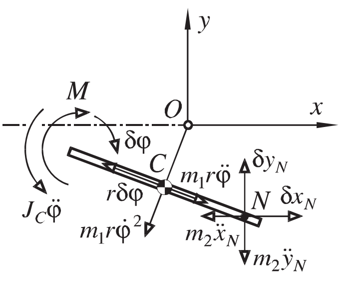
$$m_2\ddot{x}\cos\alpha+m_2\ddot{y}=-(c_2+c_3)y+m_2g\sin\alpha.$$



Slika 14.37



Slika 14.37a



Slika 14.37b

14.37 Krajevi štapa AB dužine $2l$ i mase m_1 klize po horizontalnom nepokretnom kružnom žlebu poluprečnika R. Po štapu se kreće tačka N mase m_2 a na štap deluje spreg momenta M. Odrediti zakon promene momenta sprega $M(t)$ da bi relativna brzina tačke v_0 bila konstantna. U početnom trenutku, kada se tačka nalazila na sredini štapa, štap je imao ugaonu brzinu $\dot{\varphi}_0=\omega_0$. Trenje zanemariti. Generalisane koordinate date su na crtežu.

® Kinetička energija sistema je:

$$T=\frac{1}{2}m_1v_C^2+\frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2v_N^2.$$

Pošto je:

$$r=\sqrt{R^2-l^2},\ v_C^2=r^2\dot{\varphi}^2,\ J_C=\frac{1}{12}m_1(2l)^2=\frac{1}{3}m_1l^2,\ v_N^2=(\dot{x}-r\dot{\varphi})^2+x^2\dot{\varphi}^2,$$

kinetička energija sistema ima oblik:

$$T=\frac{1}{2}[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(x^2+R^2-l^2)]\dot{\varphi}^2-m_2\dot{\varphi}\dot{x}\sqrt{R^2-l^2}+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2.$$

Rad vrši samo spreg sila momenta M, tako da je:

$$\delta\mathbf{A}=M\delta\varphi\ \Rightarrow\ Q_\varphi=M,\ Q_x=0.$$

Korišćenjem Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_{x},$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja sistema u obliku:

$$\begin{aligned}&[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(x^2+R^2-l^2)]\ddot{\varphi}-m_2\ddot{x}\sqrt{R^2-l^2}+2m_2x\dot{x}\dot{\varphi}=M,\\&-m_2\sqrt{R^2-l^2}\,\ddot{\varphi}+m_2\ddot{x}-m_2x\dot{\varphi}^2=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Prema uslovima definisanim u zadatku je:

$$x=v_0t,\ \dot{x}=v_0,\ \ddot{x}=0,$$

tako da se diferencijalne jednačine kretanja (1) svode na:

$$\begin{aligned}&[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(v_0^2t^2+R^2-l^2)]\ddot{\varphi}+2m_2v_0^2t\dot{\varphi}=M,\\&-m_2\sqrt{R^2-l^2}\,\ddot{\varphi}-m_2v_0t\dot{\varphi}^2=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Rešavanjem druge diferencijalne jednačine sistema (2), uz date početne uslove, dobija se:

$$\dot{\varphi}=\frac{2\sqrt{R^2-l^2}\,\omega_0}{2\sqrt{R^2-l^2}+v_0\omega_0t^2},\tag{3}$$

a odavde i:

$$\ddot{\varphi}=-\frac{4\sqrt{R^2-l^2}\,v_0\omega_0^2t}{[2\sqrt{R^2-l^2}+v_0\omega_0t^2]^2}.\tag{4}$$

Zamenom izraza (3) i (4) u prvu jednačinu sistema (2) dobija se izraz za moment M u funkciji vremena t:

$$M=-\frac{4[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(v_0^2t^2+R^2-l^2)]\sqrt{R^2-l^2}\,v_0\omega_0^2t}{[2\sqrt{R^2-l^2}+v_0\omega_0t^2]^2}+\frac{4\sqrt{R^2-l^2}\,m_2\omega_0v_0^2t}{2\sqrt{R^2-l^2}+v_0\omega_0t^2}.$$

Pokažimo da se do diferencijalnih jednačina (1) može doći i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta\mathbf{A}^*=M\delta\varphi-J_C\ddot{\varphi}\delta\varphi-ma_{Ct}(r\delta\varphi)-m\ddot{x}_N\delta x_N-m\ddot{y}_N\delta y_N=0.$$

Uzimajući u obzir da je:

$$J_C=\frac{1}{3}m_1l^2,\ a_{Ct}=r\ddot{\varphi},\ r=\sqrt{R^2-l^2},$$

$$x_N=-r\sin\varphi+x\cos\varphi,\ y_N=-r\cos\varphi-x\sin\varphi,$$

$$\delta x_N=-r\delta\varphi\cos\varphi+\delta x\cos\varphi-x\delta\varphi\sin\varphi,\ \delta y_N=r\delta\varphi\sin\varphi-\delta x\sin\varphi-x\delta\varphi\cos\varphi,$$

$$\ddot{x}_N=-r\ddot{\varphi}\cos\varphi+r\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\ddot{x}\cos\varphi-2\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi-x\ddot{\varphi}\sin\varphi-x\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

$$\ddot{y}_N=r\ddot{\varphi}\sin\varphi+r\dot{\varphi}^2\cos\varphi-\ddot{x}\sin\varphi-2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi-x\ddot{\varphi}\cos\varphi+x\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

opšta jednačina dinamike se svodi na:

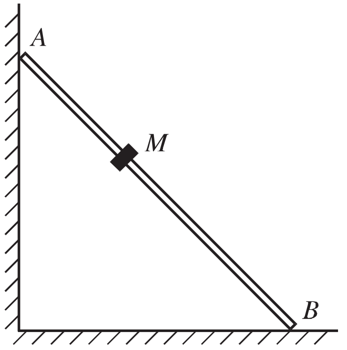
$$\{M-[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(x^2+R^2-l^2)]\ddot{\varphi}+m_2\ddot{x}\sqrt{R^2-l^2}-2m_2x\dot{x}\dot{\varphi}\}\delta\varphi+$$

$$+(m_2\sqrt{R^2-l^2}\,\ddot{\varphi}-m_2\ddot{x}+m_2x\dot{\varphi}^2)\delta x=0,$$

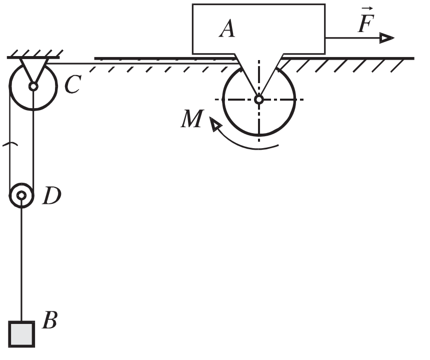
odakle zbog nezavisnosti varijacija δx i $\delta\varphi$ slede diferencijalne jednačine kretanja:

$$M-[m_1(R^2-\frac{2}{3}l^2)+m_2(x^2+R^2-l^2)]\ddot{\varphi}+m_2\ddot{x}\sqrt{R^2-l^2}-2m_2x\dot{x}\dot{\varphi}=0,$$

$$m_2\sqrt{R^2-l^2}\,\ddot{\varphi}-m_2\ddot{x}+m_2x\dot{\varphi}^2=0.$$



Slika 14.38



Slika 14.39

14.38 Homogeni štap AB mase M i dužine $2a$ klizi bez trenja krajem A po vertikalnom zidu a krajem B po horizontalnoj podlozi. Po štapu, takođe bez trenja, klizi prsten mase m. Formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

® Ako se za generalisane koordinate uzmu φ (ugao koji štap AB gradi sa horizontalom) i x (rastojanje prstena od kraja A štapa), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$[\frac{4}{3}Ma^2+m(x^2-4ax\cos^2\varphi+4a^2\cos^2\varphi)]\ddot{\varphi}-ma\ddot{x}\sin 2\varphi+2ma(x-a)\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi+$$

$$+2m\dot{x}\dot{\varphi}(-a-a\cos 2\varphi+x)=-g[Ma+m(2a-x)]\cos\varphi,$$

$$-ma\ddot{\varphi}\sin 2\varphi+m\ddot{x}+m\dot{\varphi}^2(a-a\cos 2\varphi-x)=mg\sin\varphi.$$

14.39 Telo A mase m klizi po horizontalnoj ravni bez trenja. Za telo A vezana je osovina O oko koje može da se obrće homogeni valjak poluprečnika R i mase m. Na valjak je namotano uže koje je prebačeno preko nepokretnog kotura C. Za pokretni kotur D vezan je teret B mase $4m$. Na telo A deluje horizontalna sila F a na homogeni valjak spreg momenta M=FR. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja sistema i odrediti silu u užetu u naznačenom preseku.

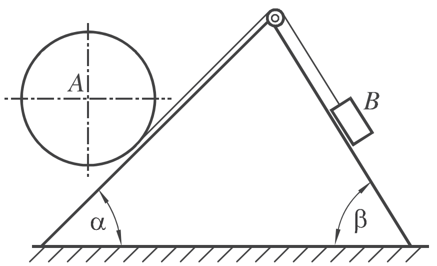
® Ako se za generalisane koordinate uzmu x (pomeranje tela A udesno) i y (pomeranje tega B vertikalno naviše), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$\frac{5}{2}m\ddot{x}-m\ddot{y}=0,\quad -m\ddot{x}+6m\ddot{y}=2F-4mg\,.$$

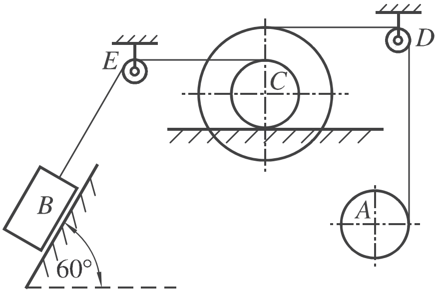
Sila u užetu u naznačenom preseku iznosi:

$$S = \frac{5F + 4mg}{7}.$$

14.40 Homogeni valjak mase m_1 i poluprečnika R nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagiba α. Na valjak je namotano nerastegljivo uže zanemarljive mase čiji je jedan kraj učvršćen za valjak a drugi za teret B mase m koji može da klizi bez trenja po strmoj ravni nagiba β, kao što je na slici pokazano. Odrediti ubrzanje ose valjka A i silu u užetu. Ako je u početnom trenutku sistem mirovao, odrediti vezu između uglova α i β da bi valjak imao samo obrtnu komponentu kretanja.



Slika 14.40



Slika 14.41

® $a = \dfrac{(m_1 + 2m_2)\sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + 3m_2} g$, niz strmu ravan.

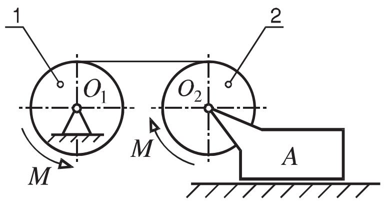
$$S = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + 3m_2}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m_2}{m_1 + 2m_2}.$$

14.41 Dva kruto spojena koaksijalna cilindra poluprečnika R i $2R$, ukupne mase $4m$ i poluprečnika inercije i=R u odnosu na podužnu centralnu osu C, mogu da se kotrljaju po horizontalnoj ravni bez klizanja. Na veći cilindar namotano je uže koje je prebačeno preko kotura D a zatim namotano na homogeni disk A poluprečnika R i mase $2m$. Drugo uže, prebačeno preko kotura E, jednim svojim krajem namotano je na manji cilindar a drugim krajem zakačeno za teret B mase $4m$ koji klizi po glatkoj strmoj ravni nagiba $60°$. Nepomični koturovi D i E su zanemarljive mase. Odrediti ubrzanja središta diska A i tereta B.

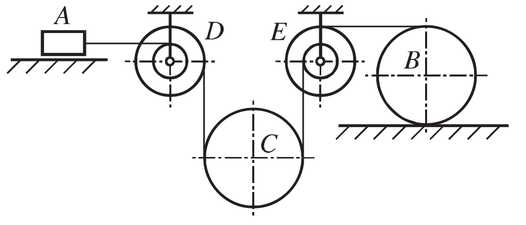
® $a_A = \dfrac{11 - 2\sqrt{3}}{15} g$, vertikalno naniže; $a_B = \dfrac{2(2\sqrt{3} - 1)}{15} g$, niz strmu ravan.

14.42 Homogeni valjak 1 poluprečnika R i mase m može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O_1. Nerastegljivo uže zanemarljive mase jednim krajem namotano je na valjak 1 a drugim krajem na homogeni valjak 2 mase m

i poluprečnika R. Valjak 2 može da se obrće oko horizontalne ose O_2 koja je vezana za telo A mase m_A. Telo A može da klizi po hrapavoj horizontalnoj ravni pri čemu je koeficijent trenja μ. Ako na valjke deluju spregovi čiji su momenti istih intenziteta M, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema. Odrediti masu m_A tela A ako je μ=1/2, M=2mgR a sila u užetu S=2mg.



Slika 14.42



Slika 14.43

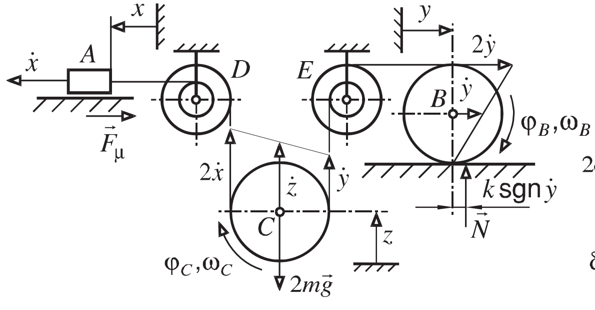
® Ako za generalisane koordinate izaberemo φ (ugao obrtanja valjka 1 u pozitivnom matematičkom sameru) i x (translatorno pomeranje tela A ulevo), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$mR^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}mR\ddot{x} = 0, \quad -\frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + (\frac{3}{2}m + m_A)\ddot{x} = \frac{M}{R} - \mu(m_A + m)g\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}.$$

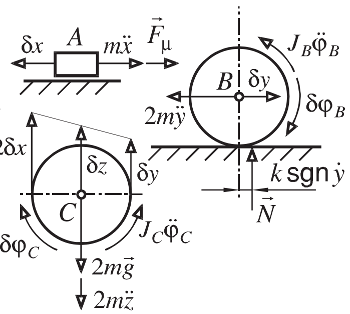
Masa tela A iznosi:

$$m_A = 3m.$$

14.43 Materijalni sistem sastoji se od tela A mase m, dve homogene kružne ploče B i C jednakih masa 2m i poluprečnika 2R i lakih kalemova D i E čiji su poluprečnici R i 2R. Koeficijent trenja klizanja tela A po horizontalnoj podlozi iznosi μ a krak otpora kotrljanju za cilindar B koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ploči iznosi k. Užad kojom su povezana tela sistema mogu se smatrati lakim i neistegljivim. Odrediti ubrzanje tela A i centra mase tela B.



Slika 14.43a



Slika 14.43b

® Neka su generalisane koordinate x i y, prikazane na slici 14.43a. Kinetička energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2}m_A\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2.$$

Pošto je:

$$m_A = m,\ m_B = m_C = 2m,\ J_B = J_C = \frac{1}{2}(2m)(2R)^2 = 4mR^2,\ \omega_B = \dot{\varphi}_B = \frac{\dot{y}}{2R},$$

$$v_C = \dot{z} = \frac{2\dot{x}+\dot{y}}{2},\ \omega_C = \dot{\varphi}_C = \frac{2\dot{x}-\dot{y}}{4R},$$

kinetička energija dobija oblik:

$$T = 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{y} + \frac{15}{8}m\dot{y}^2.$$

Virtuelni rad svih sila koje deluju na sistem je:

$$\delta\mathbf{A} = -m_C g\delta z - F_\mu \delta x\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} - Nk\delta\varphi_B\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}_B.$$

Ukoliko uzmemo u obzir da je:

$$m_C = 2m,\ \delta z = \frac{2\delta x + \delta y}{2},\ F_\mu = \mu mg,\ N = 2mg,\ \delta\varphi_B = \frac{\delta y}{2R},\ \mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}_B = \mathrm{sgn}\,\dot{y},$$

iz izraza za virtuelni rad mogu se dobiti generalisane sile:

$$Q_x = -mg(2+\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}),\ Q_y = -mg(1+\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y}).$$

Na osnovu Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y,$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

$$4m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{y} = -mg(2+\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}),\ \frac{1}{2}m\ddot{x} + \frac{15}{4}m\ddot{y} = -mg(1+\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y}), \tag{1}$$

a iz njih i tražena ubrzanja:

$$\ddot{x} = \frac{g}{59}(-28 + 2\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y} - 15\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}),\ \ddot{y} = \frac{2g}{59}(-6 - 8\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y} + \mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}).$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta\mathbf{A}^* = -F_\mu\delta x\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} - m_A\ddot{x}\delta x - m_B g\delta z - m_C\ddot{z}\delta z -$$

$$- J_C\ddot{\varphi}_C\delta\varphi_C - Nk\delta\varphi_B\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}_B - m_B\ddot{y}\delta y - J_B\ddot{\varphi}_B\delta\varphi_B = 0.$$

Pošto je:

$$F_\mu = \mu mg,\ m_A = m,\ m_B = m_C = 2m,\ \delta z = \frac{2\delta x + \delta y}{2},\ \ddot{z} = \frac{2\ddot{x}+\ddot{y}}{2},$$

$$J_B = J_C = 4mR^2,\ \ddot{\varphi}_C = \frac{2\ddot{x}-\ddot{y}}{4R},\ \delta\varphi_C = \frac{2\delta x - \delta y}{4R},$$

$$N = 2mg,\ \delta\varphi_B = \frac{\delta y}{2R},\ \ddot{\varphi}_B = \frac{\ddot{y}}{2R},\ \mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}_B = \mathrm{sgn}\,\dot{y},$$

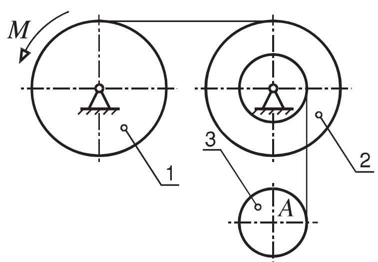
sledi da je:

$$\delta\mathbf{A}^* = [-4m\ddot{x} - \frac{m\ddot{y}}{2} - mg(2+\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x})]\delta x + [-\frac{1}{2}m\ddot{x} - \frac{15}{4}m\ddot{y} - mg(1+\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y})]\delta y = 0.$$

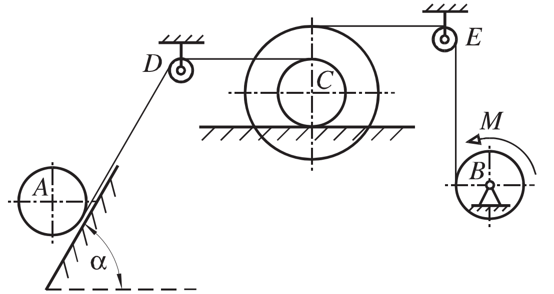
Zbog nezavisnosti varijacija δx i δy, slede diferencijane jednačine:

$$-4m\ddot{x}-\frac{1}{2}m\ddot{y}-mg(2+\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x})=0,\quad -\frac{1}{2}m\ddot{x}-\frac{15}{4}m\ddot{y}-mg(1+\frac{k}{R}\mathrm{sgn}\,\dot{y})=0.$$

14.44 Mehanički sistem se sastoji od diska 1 mase m_1 i poluprečnika $2r$, kalema 2 mase m_2 (sastavljenog od dva koaksijalna kruto spojena cilindra poluprečnika r i $2r$) i tankog cilindra 3 mase m_3 poluprečnika r. Sistem se kreće u vertikalnoj ravni pod dejstvom sprega momenta M koji deluje na disk 1. Odrediti ubrzanje ose A cilindra 3 ako je $m_1=m_2=m_3=m$, a poluprečnik inercije kalema 2 iznosi $i_2=3r/2$. Odrediti, zatim, onu vrednost momenta M pri kojoj će se cilindar 3 obrtati "u mestu", ako je sistem u početnom trenutku mirovao.



Slika 14.44



Slika 14.45

® $a=\dfrac{21mgr-4M}{38mr}$, vertikalno naniže; $M=\dfrac{21}{4}mgr$.

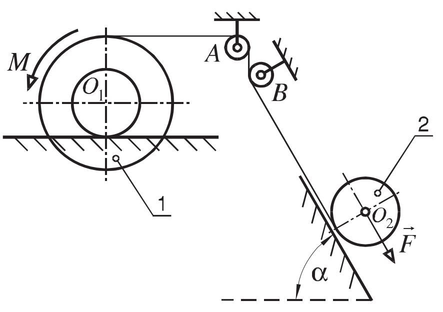
14.45 Dva koaksijalno vezana cilindra poluprečnika R i $2R$, ukupne mase m i poluprečnika inercije i u odnosu na uzdužnu centralnu osu C, mogu da se kotrljaju po horizontalnoj ravni bez klizanja. Uže obavijeno oko manjeg cilindra prebačeno je preko kotura D a zatim namotano na homogeni disk A poluprečnika R i mase m koji može da se kotrlja po glatkoj strmoj ravni nagiba α. Drugo uže, obavijeno oko većeg cilindra, prebačeno je preko kotura E a zatim namotano na disk B poluprečnika R i mase m čiji je centar nepokretan, na koji deluje spreg konstantnog momenta M. Napisati diferencijalne jednačine kretanja ovog sistema a zatim odrediti pri kojoj će se vrednosti ugla α disk B obrtati konstantnom ugaonom brzinom.

® Ako se za generalisane koordinate izaberu x (pomeranje centra diska A niz strmu ravan) i φ (ugao obrtanja koaksijalnog cilindra C u negativnom matematičkom smeru), diferencijalne jednačine kretanja su:

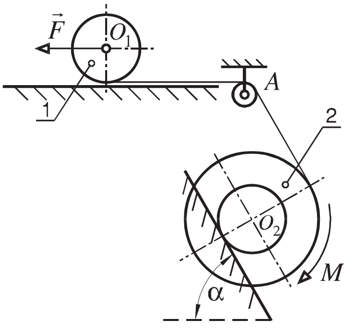
$$m\ddot{\varphi}\frac{15R^2+2i^2}{2}+mR\ddot{x}=3M,\quad mR\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}m\ddot{x}=mg\sin\alpha.$$

Tražena vrednost nagiba strme ravni data je izrazom:

$$\sin\alpha = \frac{9M}{2mgR}.$$



Slika 14.46



Slika 14.47

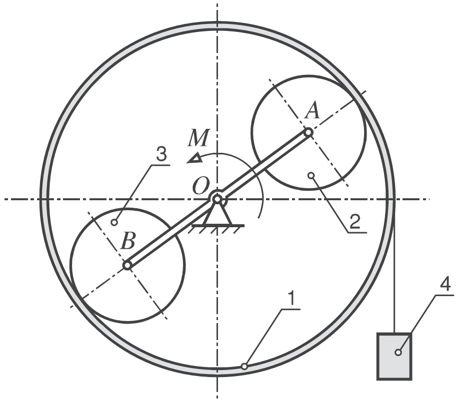
14.46 Na veći od dva koaksijalna, kruto vezana cilindra 1 mase $2m$, poluprečnika R i $2R$ i poluprečnika inercije i u odnosu na osu O_1, namotano je neistegljivo uže zanemarljive mase koje je prebačeno preko nepokretnih koturova A i B zanemarljivih masa, a drugim krajem namotano na homogeni valjak mase m i poluprečnika R. Na cilindre 1, koji se kotrljaju bez klizanja po nepomičnoj horizontalnoj ravni, deluje spreg momenta M, a na valjak 2, koji se kreće po glatkoj strmoj ravni nagiba α, deluje sila F. Odrediti pod kojim će uslovom cilindri 1 imati ugaono ubrzanje suprotno smeru momenta M.

® $M < (F + mg\sin\alpha)R.$

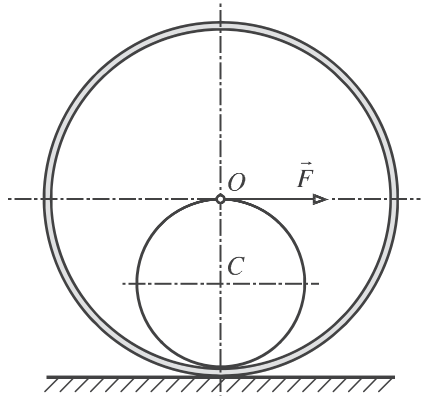
14.47 Na homogeni valjak 1 mase m i poluprečnika R namotano je neistegljivo uže zanemarljive mase koje je prebačeno preko kotura A zanemarljive mase, a drugim krajem namotano na veći od dva koaksijalna međusobno kruto vezana cilindra 2 mase $2m$, poluprečnika R i $2R$ i poluprečnika inercije i u odnosu na centralnu osu O_2. Na cilindar 1 koji se kreće po glatkoj horizontalnoj ravni deluje sila F a na cilindre 2, koji se kotrljaju bez klizanja po strmoj ravni nagnutoj pod uglom α u odnosu na horizontalu, deluje spreg momenta M. Odrediti uslov pod kojim će središte cilindara 2 imati ubrzanje usmereno uz strmu ravan.

® $F > \dfrac{M}{R} + 2mg\sin\alpha.$

14.48 Zupčanik 1 mase $2m$ i poluprečnika $3r$ koji može da se obrće oko ose O spregnut je pomoću krivaje AB sa zupčanicima 2 i 3 jednakih masa m i poluprečnika r. Na zupčanik 1 namotano je uže o čijem slobodnom kraju visi teret 4 mase $4m$. Krivaja je zanemarljive mase i može slobodno da se obrće oko ose O. Poluprečnik inercije zupčanika 1 je i=r. Zupčanike 2 i 3 smatrati homogenim diskovima. Odrediti veličinu momenta M kojim treba dejstvovati na krivaju da bi se teret 4 kretao konstantnom brzinom.



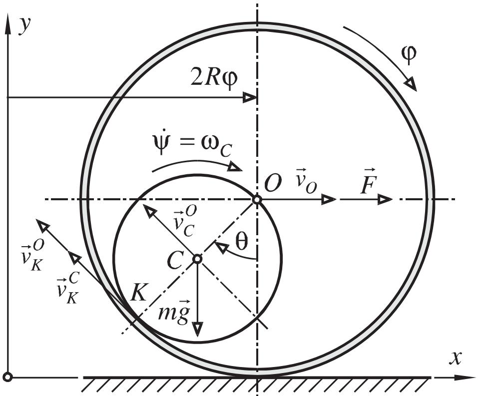
Slika 14.48



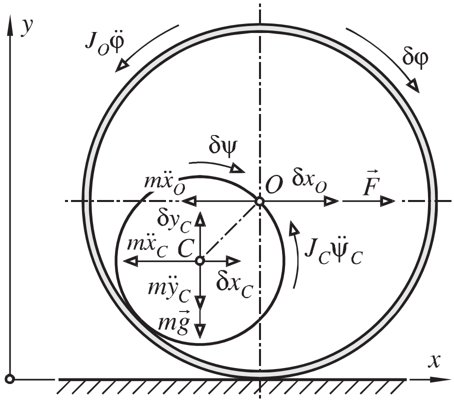
Slika 14.49

® $M = 24mgr$.

14.49 Homogeni tanki cilindar poluprečnika $2R$ i mase m može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni pod dejstvom konstantne sile F. Unutar cilindra može da se kotrlja homogeni valjak poluprečnika R i mase m. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.



Slika 14.49a



Slika 14.49b

® Neka su generalisane koordinate φ (ugao obrtanja tankog cilindra) i θ (ugao koji pravac OC gradi sa vertikalnim pravcem). Brzina tačke K je:

$$\vec{v}_K = \vec{v}_O + \vec{v}_K^O = \vec{v}_O + \vec{v}_C^O + \vec{v}_K^C,$$

odakle je:

$$v_K^C = v_K^O - v_C^O.$$

Pošto je:

$$v_K^C = R\dot{\psi},\ v_K^O = 2R\dot{\varphi},\ v_C^O = R\dot{\theta},$$ (ψ - ugao obrtanja valjka C)

sledi da je ugaona brzina obrtanja valjka:

$$\omega_C = \dot{\psi} = 2\dot{\varphi} - \dot{\theta}.$$

Kinetička energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2 .$$

Pošto je:

$$v_O = 2R\dot{\varphi},\ J_O = m(2R)^2 = 4mR^2,\ J_C = \frac{1}{2} mR^2,$$

$$v_C^2 = v_O^2 + (v_C^O)^2 + 2 v_O v_C^O \cos(\vec{v}_O, \vec{v}_C^O) = 4R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 4R^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta,$$

kinetička energija sistema dobija oblik:

$$T = 7mR^2\dot{\varphi}^2 - mR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}(1 + 2\cos\theta) + \frac{3}{4} mR^2\dot{\theta}^2 .$$

Virtuelni rad sila koje deluju na mehanički sistem je:

$$\delta \mathbf{A} = F\delta x_O - mg\delta y_C .$$

Pošto je:

$$\delta x_O = 2R\delta\varphi,\ y_C = 2R - R\cos\theta,\ \delta y_C = R\delta\theta\sin\theta,$$

sledi da je:

$$\delta \mathbf{A} = 2FR\delta\varphi - mgR\delta\theta\sin\theta,$$

tako da su generalisane sile:

$$Q_\varphi = 2FR,\ Q_\theta = -mgR\sin\theta .$$

Polazeći od Lagranževih diferencijalnih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja:

$$\begin{aligned} &mR^2[14\ddot{\varphi} - (1 + 2\cos\theta)\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \sin\theta] = 2FR, \\ &mR^2[-(1 + 2\cos\theta)\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\ddot{\theta}] = -mgR\sin\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu dobiti i primenom opšte jednačine dinamike:

$$\delta \mathbf{A}^* = F\delta x_O - m\ddot{x}_O\delta x_O - J_O\ddot{\varphi}\delta\varphi - mg\delta y_C - m\ddot{x}_C\delta x_C - m\ddot{y}_C\delta y_C - J_C\ddot{\psi}\delta\psi = 0 .$$

Pošto je:

$$\delta x_O = 2R\delta\varphi,\ \ddot{x}_O = 2R\ddot{\varphi},\ J_O = 4mR^2,$$

$$x_C = 2R\varphi - R\sin\theta,\ y_C = 2R - R\cos\theta,$$

$$\delta x_C = R(2\delta\varphi - \delta\theta\cos\theta),\ \delta y_C = R\delta\theta\sin\theta,$$

$$\ddot{x}_C = R(2\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta),\ \ddot{y}_C = R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta),$$

$$J_C = \frac{1}{2} mR^2,\ \ddot{\psi} = 2\ddot{\varphi} - \ddot{\theta},\ \delta\psi = 2\delta\varphi - \delta\theta,$$

opšta jednačina dinamike je oblika:

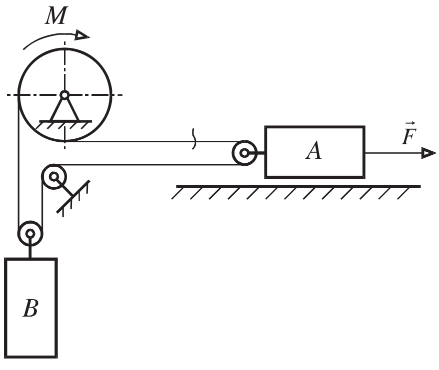
$$\delta \mathbf{A}^* = \{-mR^2[14\ddot{\varphi} - (1+2\cos\theta)\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \sin\theta] + 2FR\}\delta\varphi +,$$

$$+\{-mR^2[-(1+2\cos\theta)\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\ddot{\theta}] - mgR\sin\theta\}\delta\theta = 0.$$

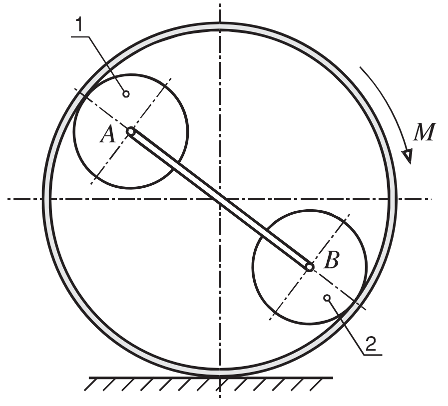
Pošto su varijacije $\delta\varphi$ i $\delta\theta$ nezavisne, iz poslednje jednakosti slede diferencijalne jednačine kretanja:

$$-mR^2[14\ddot{\varphi} - (1+2\cos\theta)\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \sin\theta] + 2FR = 0,$$

$$-mR^2[-(1+2\cos\theta)\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\ddot{\theta}] - mgR\sin\theta = 0.$$



Slika 14.50



Slika 14.51

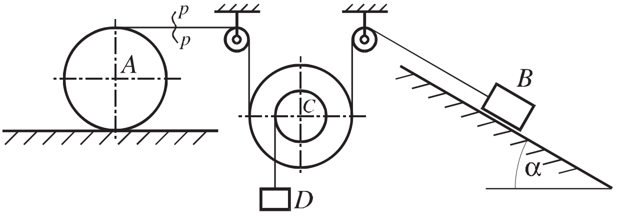
14.50 Sistem se sastoji od tela A i B jednakih masa m i koturova zanemarljivih masa. Sistem je vezan pomoću lakog, neistegljivog užeta čija su oba kraja namotana na kotur poluprečnika R zanemarljive mase. U toku kretanja na telo A, koje se kreće horizontalno, deluje sila F a na kotur spreg momenta M=FR. Zanemarujući trenje odrediti ubrzanje tela A i B i silu u užetu u naznačenom preseku.

® $a_A = 0,\ a_B = \frac{F}{m} - g$ (vertikalno naviše), $S = \frac{F}{2}$.

14.51 Homogeni prsten tankog zida, mase m i poluprečnika $3r$ može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Po unutrašnjosti prstena mogu da se kotrljaju, bez klizanja, homogeni diskovi 1 i 2, svaki mase m i poluprečnika r. Centri diskova zglobno su vezani za krajeve pravog štapa čija se težina može zanemariti. Na prsten deluje spreg momenta M. Odrediti ugaono ubrzanje prstena.

® $\varepsilon = \frac{M}{42mr^2}$ (negativan matematički smer).

14.52 Materijalni sistem prikazan na slici sastoji se od homogenog valjka A mase m_1 i poluprečnika osnove R, tereta B mase m_2, kalema C zanemarljive mase, manjeg poluprečnika R i većeg poluprečnika $2R$ i tereta D mase m. Krak otpora pri kotrljanju bez klizanja valjka A po horizontalnoj podlozi iznosi k. Teret B klizi bez trenja po strmoj ravni nagiba α. Masa užadi se zanemaruje. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema. U slučaju da je $m_1 = 8m_2 = m$, $k=R/8$ i $\alpha= 30°$, odrediti silu u užetu u naznačenom preseku.



Slika 14.52

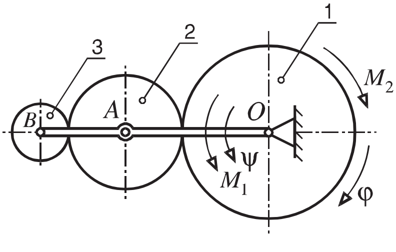
® Ukoliko se za generalisane koordinate izaberu φ (ugao obrtanja valjka A u pozitivnom matematičkom smeru) i x (pomeranje tereta B niz strmu ravan), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$(\frac{9}{4}m+\frac{3}{2}m_1)R^2\ddot{\varphi}+\frac{3}{8}mR\ddot{x}=-\frac{3}{2}mgR-km_1g\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi},$$

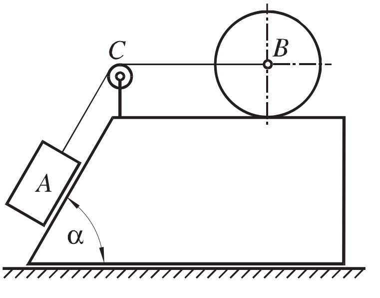
$$\frac{3}{8}mR\ddot{\varphi}+(m_2+\frac{1}{16}m)\ddot{x}=m_2g\sin\alpha-\frac{1}{4}mg.$$

Sila u užetu je:

$$S=\frac{mg}{32}(9-\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}).$$



Slika 14.53



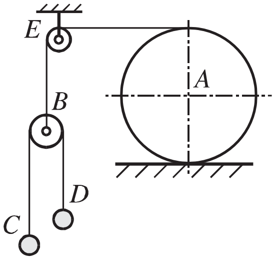
Slika 14.54

14.53 Za eliptički mehanizam prikazan na slici koji se kreće u horizontalnoj ravni napisati diferencijalne jednačine kretanja ako na spojnu polugu OAB deluje pogonski spreg momenta M_1 a na zupčanik 1 deluje pogonski spreg momenta M_2. Za generalisane koordinate uzeti ugao obrtanja poluge (ψ) i ugao obrtanja zupčanika 1 (φ). Poluprečnici zupčanika su $r_1 = 3r$, $r_2 = 2r$, $r_3 = r$ a mase $m_1 = 3m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$. Masu poluge kao i trenje u zglobovima zanemariti a zupčanike smatrati punim homogenim diskovima.

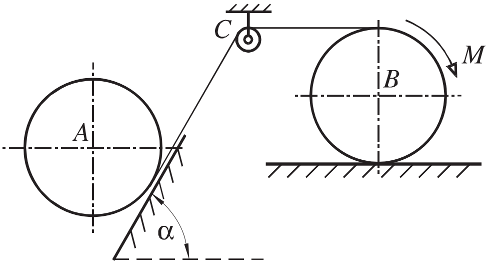
® $mr^2(27\ddot{\varphi}+18\ddot{\psi}) = M_2,\ mr^2(18\ddot{\varphi}+141\ddot{\psi}) = M_1.$

14.54 Prizmatično telo mase M=2m leži na glatkoj horizontalnoj ravni. Po kosoj ravni prizme nagiba $\alpha = 60°$ kreće se bez trenja telo A mase m koje je neistegljivim užetom, prebačenim preko idealnog kotura C zanemarljive mase, vezano za osu homogenog valjka B mase m koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni prizme. Odrediti ubrzanje prizme.

® $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{31}g$, sleva udesno.



Slika 14.55



Slika 14.56

14.55 Homogeni tanki cilindar A mase m_1 i poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj hrapavoj nepokretnoj ravni. Na cilindar je namotano uže koje je prebačeno preko kotura E a drugim krajem vezano za centar kotura B. Preko kotura B prebačeno je uže o čije su krajeve okačeni tereti C i D masa m_2 i m_3. Odrediti ubrzanje težišta cilindra A i ubrzanje tereta C i D ako je $m_1 = 4m$, $m_2 = 3m/2$, $m_3 = m/2$ i ako je krak otpora kotrljanju cilindra A jednak k. Masu koturova E i B kao i mase oba užeta zanemariti.

® Ako sa φ označimo ugao obrtanja cilindra A u negativnom matematičkom smeru, tražena ubrzanja su:

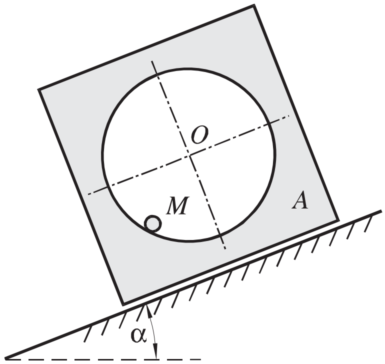
$$a_A = g\frac{3R+4k\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}}{14R}\ \text{(ulevo)},$$

$$a_C = g\frac{5R+2k\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}}{7R},\quad a_D = g\frac{R+6k\,\mathrm{sgn}\,\dot{\varphi}}{7R}\ \text{(naniže)}.$$

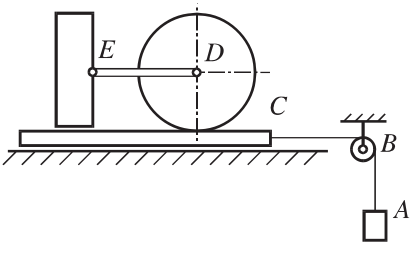
14.56 Oko homogenih tankih cilindara A i B obavijeni su krajevi konopca zanemarljive mase. Cilindri su istih poluprečnika R i jednakih masa m. Na cilindar B dejstvuje konstantni spreg momenta M tako da se cilindar kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Cilindar A se nalazi na idealnoj strmoj ravni nagiba α. Zanemarujući masu nepomičnog kotura C, odrediti ubrzanje središta cilindra A.

® $a = \dfrac{3mgR\sin\alpha - M}{4mR}$ (niz strmu ravan).

14.57 Telo A težine G može da klizi po glatkoj strmoj ravni nagiba α. U telu je izrezana cilindrična šupljina poluprečnika r po kojoj može da se kreće bez trenja kuglica M težine G. Napisati diferencijalne jednačine kretanja datog materijalnog sistema.



Slika 14.57



Slika 14.58

® Ako za generalisane koordinate izaberemo x (translatorno pomeranje tela A niz strmu ravan) i φ (ugao koji pravac OM gradi sa strmom ravni), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$2\ddot{x} - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi = 2g\sin\alpha, \quad -\ddot{x}\sin\varphi + r\ddot{\varphi} = g\cos(\alpha+\varphi).$$

14.58 Teret A težine G obešen je za jedan kraj neistegljivog konca prebačenog preko lakog kotura B. Drugi kraj konca vezan je za ploču C težine G, koja može da klizi po horizontalnoj glatkoj podlozi. Na ploči se nalazi točak D poluprečnika r i težine G (točak se može smatrati punim homogenim cilindrom) i telo E težine G. Tela D i E su međusobno vezana štapom ED zanemarljive težine. Telo D može da se kotrlja po telu C bez klizanja a telo E da klizi sa koeficijentom trenja klizanja μ. Odrediti silu S u štapu DE u toku kretanja sistema ako su veze u tačkama D i E zglobne.

® Sila zatezanja štapa iznosi:

$$S = \frac{G}{12}(1 + 8\mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{y}),$$

gde je sa y označeno relativno pomeranje tela E u odnosu na ploču C udesno.

14.59 Neistegljivo uže namotano je na dva jednaka homogena valjka koji mogu da se kreću po strmim ravnima nagiba α i β. Masa jednog valjka je m. Odrediti ubrzanje nenamotanog dela užeta i silu u njemu. Trenje zanemariti.

® Sistem ima tri stepena slobode. Generalisane koordinate x, y i φ date su na slici 14.59a. Kinetička energija sistema je:

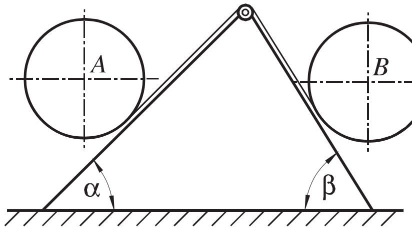
$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}J_B\dot{\psi}^2.$$

Pošto je:

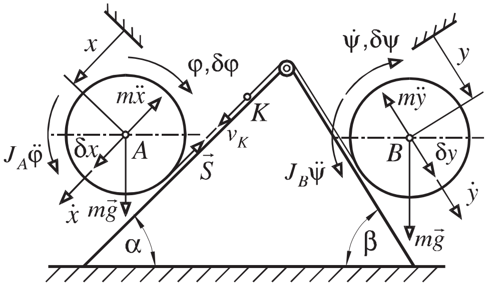
$$v_A=\dot{x},\ J_A=J_B=\frac{1}{2}mR^2,\ v_B=\dot{y},\ \dot{\psi}=\frac{v_K+v_B}{R}=\frac{(\dot{x}+R\dot{\varphi})+\dot{y}}{R},$$

kinetička energija sistema dobija oblik:

$$T=\frac{3}{4}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}mR\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mR\dot{y}\dot{\varphi}.$$



Slika 14.59



Slika 14.59a

Rad vrše samo sile teže:

$$\delta\mathbf{A}=mg(\delta x\sin\alpha)+mg(\delta y\sin\beta),$$

tako da su generalisane sile:

$$Q_x=mg\sin\alpha,\ Q_y=mg\sin\beta,\ Q_\varphi=0.$$

Polazeći od Lagranževih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi,$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}m\ddot{x}+\frac{1}{2}m\ddot{y}+\frac{1}{2}mR\ddot{\varphi}=mg\sin\alpha,\\&\frac{1}{2}m\ddot{x}+\frac{3}{2}m\ddot{y}+\frac{1}{2}mR\ddot{\varphi}=mg\sin\beta,\\&\frac{1}{2}mR\ddot{x}+\frac{1}{2}mR\ddot{y}+mR^2\ddot{\varphi}=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Rešavanjem ovog sistema linearnih jednačina po $\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{\varphi}$, dobija se:

$$\ddot{x}=\frac{5\sin\alpha-\sin\beta}{6}g,\ \ddot{y}=\frac{-\sin\alpha+5\sin\beta}{6}g,\ \ddot{\varphi}=-\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{3}\frac{g}{R}.$$

Ubrzanje nenamotanog dela užeta je:

$$a_K=\frac{dv_K}{dt}=\ddot{x}+R\ddot{\varphi}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{2}g.$$

Iz diferencijalne jednačine obrtanja valjka A:

$$J_A\ddot{\varphi} = -SR,$$

dobija se sila u užetu:

$$S = \frac{mg}{6}(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Pokažimo da se diferencijalne jednačine (1) mogu dobiti i korišćenjem opšte jednačine dinamike:

$$\delta\mathbf{A}^* = mg(\delta x \sin\alpha) + mg(\delta y \sin\beta) - m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y - J_A\ddot{\varphi}\delta\varphi - J_B\ddot{\psi}\delta\psi = 0,$$

uzimanjem u obzir da je:

$$J_A = J_B = \frac{1}{2}mR^2,\ \dot{\psi} = \frac{\dot{x} + \dot{y} + R\dot{\varphi}}{R},\ \delta\psi = \frac{\delta x + \delta y + R\delta\varphi}{R},\ \ddot{\psi} = \frac{\ddot{x} + \ddot{y} + R\ddot{\varphi}}{R},$$

i uvršćivanjem ovih izraza u opštu jednačinu dinamike, dobija se:

$$\delta\mathbf{A}^* = (-\frac{3}{2}m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{y} - \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + mg\sin\alpha)\delta x +$$

$$+(-\frac{1}{2}m\ddot{x} - \frac{3}{2}m\ddot{y} - \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + mg\sin\beta)\delta y +$$

$$+(-\frac{1}{2}mR\ddot{x} - \frac{1}{2}mR\ddot{y} - mR^2\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0.$$

Zbog nezavisnosti varijacija δx, δy i $\delta\varphi$ slede diferencijalne jednačine kretanja:

$$-\frac{3}{2}m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{y} - \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + mg\sin\alpha = 0,$$

$$-\frac{1}{2}m\ddot{x} - \frac{3}{2}m\ddot{y} - \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + mg\sin\beta = 0,$$

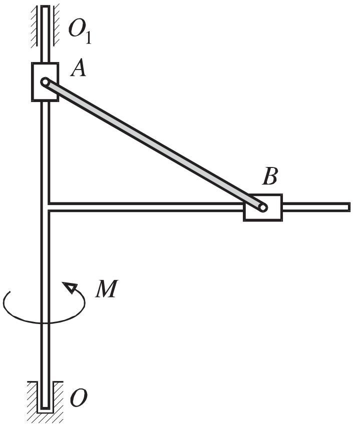
$$-\frac{1}{2}mR\ddot{x} - \frac{1}{2}mR\ddot{y} - mR^2\ddot{\varphi} = 0.$$

14.60 Po glatkim, međusobno upravnim vođicama tela koje se obrće oko nepokretne vertikalne ose kreću se klizači A i B jednakih masa m i zanemarljivih dimenzija. Klizači su međusobno zglobno vezani štapom dužine l i zanemarljive mase. Moment inercije obrtnog tela u odnosu na osu obrtanja iznosi J. U toku kretanja na obrtno telo deluje spreg čiji moment za osu obrtanja iznosi M. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja sistema.

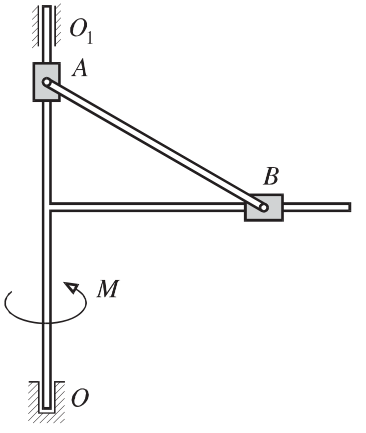
® Ako za generalisane koordinate izaberemo φ (ugao obrtanja tela oko vertikalne ose Oz u smeru delovanja sprega M) i θ (ugao koji štap AB gradi sa horizontalom), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$(J + ml^2\cos^2\theta)\ddot{\varphi} - ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta = M,$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = -mgl\cos\theta.$$



Slika 14.60

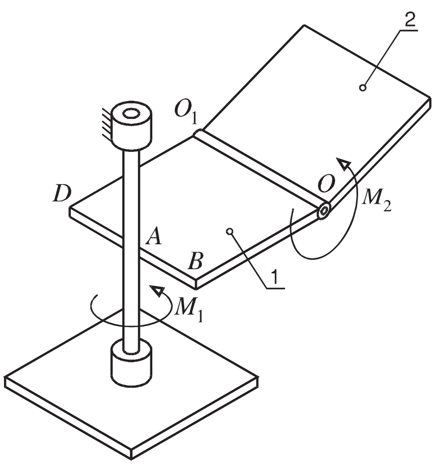


Slika 14.61

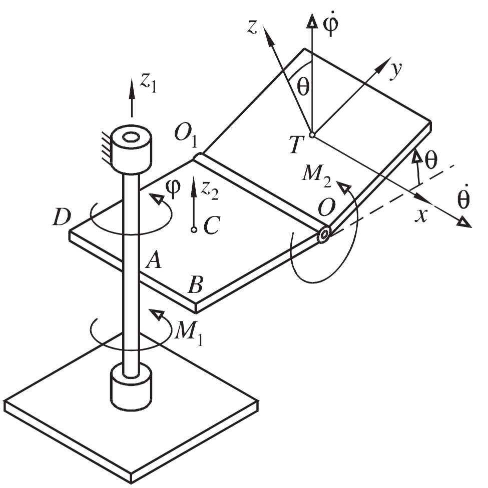
14.61 Rešiti prethodni zadatak za slučaj da su mase klizača zanemarljive a da je štap *AB* homogen, mase *m*.

® $(J+\frac{1}{3}ml^2\cos^2\theta)\ddot{\varphi}-\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta = M,$

$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta.$



Slika 14.62



Slika 14.63

14.62 Dve jednake tanke homogene kvadratne ploče iste mase *m* i ivice *a* međusobno su spojene osovinom OO_1 oko koje se relativno obrću pod dejstvom sprega momenta M_2. Horizontalna ploča 1 zavarena je za laku vertikalnu osovinu, sa kojom se zajedno obrće pod dejstvom sprega momenta M_1. Ako je $\overline{AB}=\overline{AD}$ napisati diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema.

® Neka su generalisane koordinate φ (ugao obrtanja ploče 1 oko vertikalne ose) i θ (ugao koji ploča 2 gradi sa horizontalom). Kinetička energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2} J_{Az_1} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2}(J_{Tx}\omega_x^2 + J_{Ty}\omega_y^2 + J_{Tz}\omega_z^2).$$

Pri tome je:

$$J_{Az_1} = J_{Cz_2} + m\overline{AC}^2 = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{5}{12}ma^2,$$

$$v_T^2 = (\frac{a}{2}\dot{\theta})^2 + (a + \frac{a}{2}\cos\theta)^2 \dot{\varphi}^2, \ \omega_x = \dot{\theta}, \ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta, \ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta,$$

$$J_{Tz} = 2J_{Tx} = 2J_{Ty} = \frac{1}{6}ma^2,$$

tako da izraz za kinetičku energiju dobija oblik:

$$T = \frac{1}{12}(9 + 6\cos\theta + 2\cos^2\theta) ma^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} ma^2 \dot{\theta}^2.$$

Iz izraza za virtuelni rad:

$$\delta \mathbf{A} = M_1 \delta\varphi + M_2 \delta\theta - \frac{1}{2} mga \cos\theta \delta\theta,$$

dobijaju se generalisane sile:

$$Q_\varphi = M_1, \ Q_\theta = M_2 - \frac{1}{2} mga \cos\theta.$$

Polazeći od Lagranževih jednačina druge vrste:

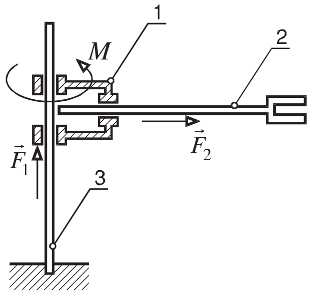
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

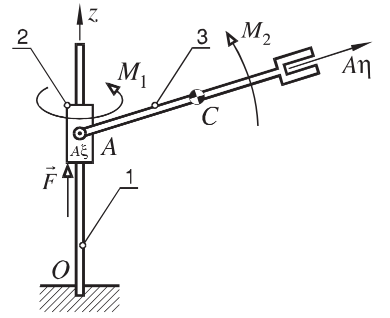
$$\frac{9 + 6\cos\theta + 2\cos^2\theta}{6} ma^2 \ddot{\varphi} - \frac{3\sin\theta + \sin 2\theta}{3} ma^2 \dot{\varphi}\dot{\theta} = M_1,$$

$$\frac{1}{3} ma^2 \ddot{\theta} + \frac{3\sin\theta + \sin 2\theta}{6} ma^2 \dot{\varphi}^2 = M_2 - \frac{1}{2} mga \cos\theta.$$

14.63 Mehanizam manipulatora sastoji se od nepokretnog člana 3 i pokretnih članova 1 i 2. Nepokretni član 3 omogućava istovremeno vertikalno pomeranje i obrtanje oko vertikalne ose člana 1. Po horizontalnim vođicama, vezanim za član 1, može da klizi član 2. Masa člana 1 je m_1 a moment inercije u odnosu na osu obrtanja je J_1. Masa člana 2 je m_2 a moment inercije, u odnosu na njegovu vertikalnu središnju osu je J_2. U toku kretanja na član 1 deluje vertikalna sila F_1 i spreg momenta M u odnosu na osu obrtanja, a na član 2 sila F_2 u pravcu horizontalnih vođica. Zanemarujući trenje postaviti diferencijalne jednačine kretanja manipulatora.



Slika 14.63



Slika 14.64

® Ako za generalisane koordinate izabremo z (translatorno pomeranje segmenta 1 vertikalno naviše), φ (ugao obrtanja segmenta 1 oko nepokretnog segmenta 3 u smeru dejstva sprega M) i x (rastojanje centra mase segmenta 2 od ose rotacije), diferencijalne jednačine kretanja su:

$$(m_1+m_2)\ddot{z}=F_1-m_1g-m_2g,$$

$$(J_1+J_2+m_2x^2)\ddot{\varphi}+2m_2x\dot{x}\dot{\varphi}=M,$$

$$m_2\ddot{x}-m_2x\dot{\varphi}^2=F_2.$$

14.64 Pokretni član manipulatora krajem A kreće se po nepokretnoj vertikalnoj osi Oz i obrće se oko nje i sopstvene ose $A\xi$. Masa pokretnog člana je m a njegovo težište C nalazi se na rastojanju $\overline{AC}=a$. Osa $A\eta$ je jedna od glavnih centralnih osa inercije pokretnog člana za koju je aksijalni moment inercije zanemarljiv. Momenti inercije za druge dve glavne centralne ose imaju približno jednake vrednosti J. U toku kretanja na pokretni član manipulatora deluju sila F vertikalnog pravca i spregovi čiji momenti za ose obrtanja imaju vrednosti $M_{Oz}=M_1$ i $M_{A\xi}=M_2$. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja manipulatora.

® Ako za generalisane koordinate izabremo z (translatorno pomeranje segmenta 2 vertikalno naviše), φ (ugao obrtanja segmenta 2 oko nepokretnog segmenta 1 u smeru dejstva sprega M_1) i θ (ugao koji osa $A\eta$ segmenta 3 gradi sa horizontalom), diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$m\ddot{z}+ma\ddot{\theta}\cos\theta-ma\dot{\theta}^2\sin\theta=F-mg,$$

$$(J+ma^2)\ddot{\varphi}\cos^2\theta-(J+ma^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin2\theta=M_1,$$

$$ma\ddot{z}\cos\theta+(J+ma^2)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}(J+ma^2)\dot{\varphi}^2\sin2\theta=M_2-mga\cos\theta.$$