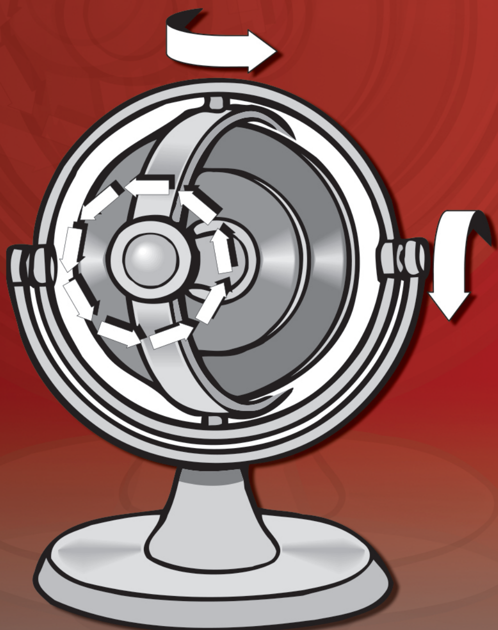
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Никола С. Младеновић
Наташа Р. Тришовић

ДИНАМИКА



МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 2015.

У Н И В Е Р З И Т Е Т У Б Е О Г Р А Д У

Никола С. Младеновић
Наташа Р. Тришовић

ДИНАМИКА

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 2015.

Динамика
Прво издање

Аутори:
Др **Никола Младеновић,** редовни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Наташа Тришовић,** ванредни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду

Рецензенти:
Др **Драгомир Зековић,** редовни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Мирко Павишић,** ванредни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Оливера Јеремић,** ванредни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду

Лектор:
Светлана Илијић, дипломирани филолог

Издавач:
Машински факултет Универзитета у Београду
Краљице Марије 16, 11120 Београд 35, Србија
http://www.mas.bg.ac.rs/

За издавача:
Др **Радивоје Митровић**, декан
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду

Штампање одобрила Комисија за издавачку делатност бр. 23/2015. од 07.10.2015.
Машинског факултета

Председник Комисије:
Др **Владимир Буљак**, уредник
доцент Машинског факултета Универзитета у Београду

Компјутерски слог и графичка обрада: Аутори

Штампа:
Планета Принт
Игора Васиљева 33р, Београд
http://planeta-print.rs/
Тел: +381 650 65 64

Тираж: 400 примерака
ISBN 978-86-7083-884-0

Садржај

Предговор

Непосредан повод за издавање ове публикације није проистекао из потребе да се њоме попуни недостатак оваквих издања у домаћој стручној литератури, већ да се допуном и проширењем анализе неких научних области студентима омогући да употпуне своје теоријско знање. Заједно са књигом МЕХАНИКА–II (КИНЕМАТИКА), овај уџбеник чини заокружену целину потребну за праћење наставног плана и програма предмета МЕХАНИКА 2 и МЕХАНИКА 3 основних академских студија, као и предмета МЕХАНИКА М мастер академских студија Машинског факултета Универзитета у Београду. Поједина поглавља могу олакшати и праћење курса МЕХАНИКА Д на докторским академским студијама поменутог факултета. Поред тога што је књига првенствено намењена студентима машинских факултета, она може бити од користи и студентима осталих техничких факултета и виших машинских школа.

При излагању материје задржана је уобичајена подела динамике, на основу које је садржај књиге подељен на две целине: Динамику материјалне тачке и Динамику материјалног система, са укупно дванаест поглавља. У циљу избегавања непотребног понављања сличних поступака, приступ градиву у неким поглављима је дедуктиван, што је значајно допринело умањењу обима тих тематских целина.

Аутори су водили рачуна да су на нашем језику расположиве бројне збирке задатака из области теоријске и примењене механике, односно динамике, што је утицало на њихову одлуку да примерима допунски не оптерећују садржај ове књиге. Студенти се упућују да избором збирке задатака из области које теоријски обрађује ова књига примене стечено знање и припреме се за полагање испита.

На овај начин аутори желе да изразе своју дубоку захвалност рецензентима, проф. др Драгомиру Зековићу, проф. др Мирку Павишићу и проф. др Оливери Јеремић, на великој помоћи и уложеном труду при прегледу рукописа и настојању да корисним саветима допринесу бољем садржају и изгледу ове књиге.

Текст је прочитала Светлана Илијић, дипломирани филолог, којој се

аутори такође захваљују на залагању у жељи да уџбеник буде у складу са правописом нашег језика.

За све евентуалне штампарске и техничке грешке одговорни су аутори, који ће бити захвални свима који упуте корисне коментаре, сугестије или исправке грешака.

Аутори

у Београду,
септембар 2015.

12.5 Удар тачке о покретну површ

Ако је површ у коју удара материјална тачка M масе m нестационарна, тада се ова веза аналитички дефинише неједначином:

$$f(x, y, z; t) \geq 0. \tag{12.39}$$

Када се тачка налази на вези, њене координате морају задовољавати услов:

$$f(x, y, z; t) = 0. \tag{12.40}$$

Да би се одредио тренутак додира T_1 тачке и површи, довољно је коначне једначине кретања тачке:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{и} \quad z = z(t) \tag{12.41}$$

заменити у релацију (12.40), тј.

$$f\big[x(t), y(t), z(t); t\big] = f(t) = 0, \tag{12.42}$$

и наћи корене тако добијене једначине. Најмањи реални и позитивни корен одређује тренутак T_1 додира тачке и површи.

Даље кретање тачке зависи од тога да ли су њене коначне једначине кретања у тренутку $t = T_1$ сагласне са условима које намеће веза. Ако су задовољени услови (2.8) из поглавља 2.1, тј.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_1} = 0, \quad \left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_{t=T_1} = 0, \ldots, \left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t=T_1} = 0, \ldots, \tag{12.43}$$

тачка остаје на вези. Уколико је макар један од наведених извода позитиван, тачка оставља везу у тренутку $t = T_1$. У оба поменута случаја не долази до појаве удара. Удар настаје уколико коначне једначине кретања тачке у тренутку $t = T_1$ доводе до релације:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_1} < 0, \tag{12.44}$$

што је у противуречности са неједначином (12.39), заједно са условом (12.40). У том случају долази до појаве ударне реакције везе, која мења брзину тачке тако да она не противуречи услову (12.39) и условима који из њега произилазе. Тренутак T_1 одговара почетку удара.

За време удара извод df/dt представља непрекидну функцију, која мења свој знак при пролазу кроз нулу.

Уколико је извод df/dt једнак нули у тренутку $t = T_m$, а у $t = T_2$ позитиван, сагласно разматрањима из претходног поглавља, долази се до закључка да временски интервал од почетка удара до тренутка $t = T_m$

одговара првој фази удара, док интервал времена од тренутка $t = T_m$ до тренутка $t = T_2 = T_1 + \tau$, односно краја удара, одговара фази успостављања. На крају друге фазе удара испуњен је услов

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_2} > 0 \tag{12.45}$$

и тачка напушта површ. При удару тачке о непокретну површ, тренутак који раздваја две фазе удара одређује се из услова да је пројекција брзине тачке на нормалу непокретне површи у тачки додира једнака нули, што се може изразити у аналитичкој форми:

$$\mathrm{grad} f \cdot \vec{v}_m = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}_m + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}_m + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}_m = 0, \tag{a}$$

где је $\vec{v}_m$ брзина тачке на крају прве фазе удара, док су $\dot{x}_m$, $\dot{y}_m$ и $\dot{z}_m$ њене пројекције на осе Декартовог координатног система. За стационарне везе лева страна једначине (a) једнака је $(\frac{df}{dt})_{t=T_m}$. Крај прве фазе удара одређује се из истог услова и код нестационарних веза, тј.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_m} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}_m + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}_m + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}_m = 0, \tag{12.46}$$

што се може краће записати:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + \vec{v}_m \cdot \mathrm{grad} f\big|_{t=T_m} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + \big|\mathrm{grad} f\big|_{t=T_m} u_n = 0, \tag{12.47}$$

где је u_n пројекција на нормалу површи $f(x, y, z; t) = 0$ заједничке брзине двеју тачака, тачке површи и материјалне тачке M, која удара у поменуту површ, на крају прве фазе удара. У оквирима класичне теорије удара није могуће одредити тренутак $t = T_m$ у коме се прва фаза удара завршава. Због веома кратког времена трајања удара претпоставља се да координате тачке и време задржавају своје вредности, које су имали у тренутку $t = T_1$ на почетку удара. На основу тих претпоставки може се написати:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_1} + \big|\mathrm{grad} f\big|_{t=T_1} u_n = 0. \tag{12.48}$$

Применом теореме (12.11) о промени количине кретања материјалне тачке за сваку фазу удара добија се:

$$\begin{aligned} mu_n - mv_n &= I_{N_1}, \\ mv'_n - mu_n &= I_{N_2}. \end{aligned} \tag{12.49}$$

Разлике пројекција $u_n - v_n$ и $v'_n - u_n$ представљају пројекције на нормалу релативне брзине тачке површине $f(x, y, z; t) = 0$ и брзине тачке M на почетку прве и крају друге фазе удара.

Уколико је позната релација:

$$I_{N_2} = k\, I_{N_1}, \tag{12.50}$$

у којој је константа k коефицијент успостављања, на основу једначина (12.48) и (12.49) могу се одредити пројекција v_n' брзине тачке M на нормалу на крају друге фазе удара, пројекција u_n брзине тачке површи, односно материјалне тачке M на нормалу на крају прве фазе удара, као и пројекције на нормалу импулса ударних реакција I_{N_1} и I_{N_2} у току прве и друге фазе удара, респективно. Пројекција импулса укупне ударне реакције одређена је збиром:

$$I_N = I_{N_1} + I_{N_2},$$

док се из једначина (12.49) одређује однос пројекција релативних брзина:

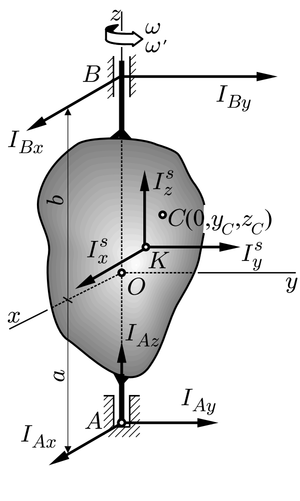
$$k = -\frac{v_n' - u_n}{v_n - u_n}, \tag{12.51}$$

што представља генерализацију израза (12.38).

12.6 Одређивање ударних реакција тела које се обрће око непокретне осе

На слици 12.4 приказано је круто тело масе M које је везано потпорним лежиштем у тачки A и цилиндричним у тачки B. Декартов координатни систем $Axyz$ круто је везан за тело и обрће се заједно са телом око непокретне осе Az угаоном брзином интензитета ω. У неком тренутку на тело у тачки $K(x_K, y_K, z_K)$ дејствује спољашња ударна сила чији је импулс $\vec{I}^s$. У тачкама A и B јављају се ударне реакције чији су импулси:

$$\vec{I}_A = I_{Ax}\vec{\imath} + I_{Ay}\vec{\jmath} + I_{Az}\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{I}_B = I_{Bx}\vec{\imath} + I_{By}\vec{\jmath}.$$



Слика 12.4

Непосредно после удара тело има угаону брзину интензитета ω'. Центар маса C тела налази се на координатној равни yOz и његове координате су $C(0, y_C, z_C)$. Брзине тачке C непосредно после и пре удара су:

$$\vec{v}_C'(-y_C\omega', 0, 0) \quad \text{и} \quad \vec{v}_C(-y_C\omega, 0, 0), \tag{12.52}$$