

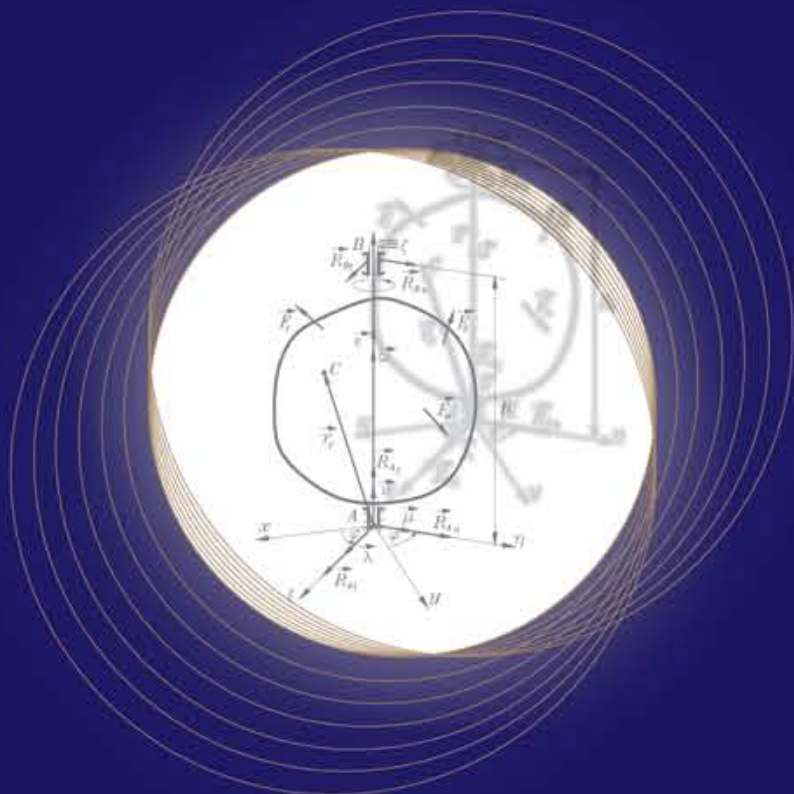
UNIVERZITET U BEOGRADU  
MAŠINSKI FAKULTET



Mirko Pavišić  
Zoran Golubović  
Zoran Mitrović

# MEHANIKA

## DINAMIKA SISTEMA



Mirko Pavišić Zoran Golubović Zoran Mitrović

***M E H A N I K A***  
***DINAMIKA SISTEMA***

Beograd, 2011.

*Autori:*

*Prof. dr Mirko Pavišić, Mašinski fakultet, Beograd*

*Prof. dr Zoran Golubović, Mašinski fakultet, Beograd*

*Prof. dr Zoran Mitrović, Mašinski fakultet, Beograd*

## **MEHANIKA**

### **Dinamika sistema**

Prvo izdanje

---

*Recenzenti:*

*Doc. dr Olivera Jeremić, Mašinski fakultet, Beograd*

*Prof. dr Aleksandar Bakša, Matematički fakultet, Beograd*

*Izdavač:*

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

11120 Beograd, Kraljuce Marije 16,

telefon – 011 3370 350 i 3302 384, telefax: 011 3370 364

*Za izdavača: Dekan, prof. dr Milorad Milovančević*

*Glavni i odgovorni urednik: prof. dr Aleksandar Obradović*

Odobreno za štampu odlukom Dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu br. od 1.1.2011.godine

*Štampa:*

**PLANETA PRINT**

11000 Beograd, Ruzveltova 10, tel.: 011 3088129

Tiraž: 500 primeraka

---

© Autori i Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.  
Zabranjeno preštampavanje i umnožavanje. Sva prava zadržavaju izdavač i autori.

# S A D R Ź A J

1. Uvodna razmatranja .....	1
1.1. Sistem materijalnih tačaka. Kruto telo. Veze .....	1
1.2. Podela sila koje deluju na materijalni sistem .....	3
1.3. Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema.....	5
2. Geometrija masa .....	7
2.1. Masa.....	7
2.2. Gustina mase.....	8
2.3. Statički moment mase .....	9
2.4. Centar masa.....	9
2.4.1. Osobine centra masa .....	10
2.5. Momenti inercije .....	12
2.6. Proizvodi inercije .....	15
2.7. Određivanje glavnih i glavnih centralnih osa inercije.....	18
2.8. Hajgens - Štajnerova teorema .....	19
2.9. Moment inercije u odnosu na proizvoljnu osu kroz datu tačku .....	20
2.10. Elipsoid inercije .....	22
2.11. Osobine glavnih i glavnih centralnih osa inercije .....	23
Zadaci.....	25
3. Opšte teoreme i zakoni materijalnog sistema i krutog tela .....	42
3.1. Količina kretanja materijalnog sistema i krutog tela.....	42
3.1.1. Količina kretanja materijalnog sistema.....	42
3.1.2. Količina kretanja krutog tela .....	43
3.2. Teorema o promeni količine kretanja .....	43
3.2.1. Zakon o održanju količine kretanja.....	45
3.2.2. Teorema o kretanju središta masa .....	47
3.2.3. Zakon o održanju kretanja središta masa .....	48

3.3. Moment količine kretanja materijalnog sistema i krutog tela (kinetički moment).....	49
3.3.1. Moment količine kretanja materijalnog sistema .....	49
3.3.2. Moment količine kretanja materijalnog sistema koji vrši složeno kretanje .....	50
3.3.3. Moment količine kretanja krutog tela .....	52
3.3.3.1. Moment količine kretanja krutog tela koje se kreće translatorno.....	53
3.3.3.2. Moment količine kretanja krutog tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	54
3.3.3.3. Moment količine kretanja krutog tela koje vrši ravno kretanje .....	55
3.3.3.4. Moment količine kretanja krutog tela koje se obrće oko nepokretne tačke .....	56
3.3.3.5. Moment količine kretanja krutog tela koje vrši opšte kretanje.....	58
3.4. Teorema o promeni momenta količine kretanja u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu.....	58
3.4.1. Rezalova teorema .....	60
3.4.2. Zakon o održanju momenta količine kretanja u onosi na nepokretni pol i nepokretnu osu .....	60
3.4.3. Teorema o promeni momenta količine kretanja u odnosu na pokretni pol i pokretnu osu .....	61
3.5. Razdvajanje opšteg zadatka o kretanju materijalnog sistema i tela na dva zadatka.....	65
3.6. Kinetička energija materijalnog sistema i krutog tela .....	66
3.6.1. Kinetička energija materijalnog sistema .....	66
3.6.2. Kenigova teorema .....	67
3.6.3. Kinetička energija tela .....	68
3.6.3.1. Kinetička energija tela koje se kreće translatorno.....	69
3.6.3.2. Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	69
3.6.3.3. Kinetička energija tela koje vrši ravno kretanje.....	70
3.6.3.4. Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne tačke.....	71
3.6.3.5. Kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje .....	73
3.7. Rad sila koje deluju na materijalni sistem i kruto telo .....	73
3.7.1. Rad unutrašnjih sila izmenljivog i neizmenljivog materijalnog sistema .....	73
3.7.2. Rad sile teže materijalnog sistema .....	75
3.7.3. Rad sprega sila .....	75
3.7.4. Rad sila koje deluju na telo koje se kreće translatorno .....	76
3.7.5. Rad sila koje deluju na telo koje se obrće oko nepokretne ose .....	77
3.7.6. Rad sila koje deluju na telo koje vrši ravno kretanje .....	78
3.7.7. Rad sila koje deluju na telo koje se obrće oko nepokretne tačke... 80	

3.7.8. Rad sila koje deluju na telo koje vrši opšte kretanje .....	81
3.8. Teorema o promeni kinetičke energije	
materijalnog sistema i krutog tela .....	81
3.8.1. Zakon o održanju mehaničke energije .....	83
Zadaci.....	85
4. Kretanje krutog tela.....	101
4.1. Translatorno kretanje tela .....	101
4.1.1. Diferencijalne jednačine translatornog kretanja tela .....	101
4.2. Obrtanje tela oko nepokretne ose.....	102
4.2.1. Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose.....	102
4.2.2. Određivanje dinamičkih reakcija u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	106
4.2.3. Uslovi dinamičke uravnoteženosti tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	107
4.2.4. Relativna ravnoteža tela koje se obrće oko nepokretne ose .....	108
4.2.5. Fizičko klatno.....	113
4.2.5.1. Eksperimentalno određivanje momenata inercije. Metoda oscilacija klatna.....	115
4.3. Ravno kretanje tela.....	115
4.3.1. Diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela .....	116
4.3.2. Kotrljanje bez klizanja diska po nepokretnoj površi.....	117
4.4. Obrtanje tela oko nepokretne tačke (Sferno kretanje tela).....	120
4.4.1. Diferencijalne jednačine tela koje se obrće oko nepokretne tačke .....	120
4.4.1.1. Ojlerov slučaj tela koje se obrće oko nepokretne tačke ..	122
4.4.1.2. Lagranžev slučaj tela koje se obrće oko nepokretne tačke.....	125
4.4.1.3. Slučaj Kovalevske.....	127
4.4.2. Osnovi elementarne (približne) teorije giroskopa.....	128
4.4.2.1. Uravnoteženi giroskop .....	129
4.4.2.2. Regularna precesija teškog giroskopa .....	130
4.4.2.3. Giroskop sa dva stepena slobode kretanja. Giroskopski efekt .....	131
4.5. Opšte kretanje tela.....	133
4.4.1. Diferencijalne jednačine opšteg kretanja tela.....	133
Zadaci.....	135
5. Elementi analitičke mehanike .....	151
5.1. Generalisane koordinate.....	151

5.2. Generalisane brzine i ubrzanja .....	153
5.3. Varijacija koordinata .....	155
5.4. Virtualna (moguća) pomeranja holonomnog sistema .....	156
5.5. Rad sila na virtualnom pomeranju .....	160
5.5.1. Idealne veze .....	160
5.6. Generalisana sila .....	161
5.7. Lagranžev princip virtualnih pomeranja. Opšta jednačina statike .....	163
5.8. Lagranževe jednačine II vrste .....	166
5.9. Kinetička energija materijalnog sistema u generalisanim koordinatama .....	169
Zadaci .....	170
6. Teorija udara .....	187
6.1. Osnovne postavke teorije udara .....	187
6.2. Teorema o promeni količine kretanja materijalnog sistema pri udaru .....	189
6.2. Teorema o promeni momenta količine kretanja materijalnog sistema pri udaru .....	190
6.4. Idealni udar .....	192
6.4.1. Dejstvo zadatih trenutnih impulsa na kruto telo .....	193
6.4.1.1. Udar po slobodnom telu .....	193
6.4.1.2. Udar po telu sa jednom nepokretnom tačkom .....	194
6.4.1.3. Udar po telu koje ima nepokretnu osu .....	195
6.4.2. Udarno dejstvo idealne veze na pokretno kruto telo .....	197
6.4.2.1. Trenutno zaustavljanje tačke tela koje je vršilo opšte kretanje .....	197
6.4.2.2. Trenutno zaustavljanje tačke tela koje se obrtalo oko nepokretne tačke .....	198
6.4.2.3. Trenutno zaustavljanje tačke tela koje se obrtalo oko nepokretne ose .....	199
6.5. Neidealni udar .....	200
6.5.1. Koeficijent uspostavljanja (koeficijent udara) .....	200
6.5.2. Udar tačke o glatku nepokretnu površ .....	202
6.5.3. Izgubljena kinetička energija tačke pri udaru o glatku nepokretnu površ .....	204
6.5.4. Sudar tačke i pokretne površi .....	205
6.5.5. Sudar dva slobodna tela .....	207
6.5.5.1. Ravanski sudar dva tela .....	209
6.5.5.2. Centralni sudar dva tela .....	210
6.5.6. Sudar dva tela pri sfernom kretanju .....	211
6.5.6.1. Sudar dva tela koja se obrću oko paralelnih nepokretnih osa .....	212

---

6.6. Lagranževe jednačine II vrste u teoriji udara .....	213
6.7. Udar (sudar) tela koja nisu glatka .....	215
6.7.1. Ravan sudar dva tela. Rautova hipoteza .....	215
6.8. Zaključne napomene .....	217
Zadaci.....	219
7. Dalamberov princip .....	242
7.1. Dalamberov princip za vezani materijalni sistem .....	242
7.2. Lagranž-Dalamberov princip. Opšta jednačina dinamike.....	244
Zadaci.....	245