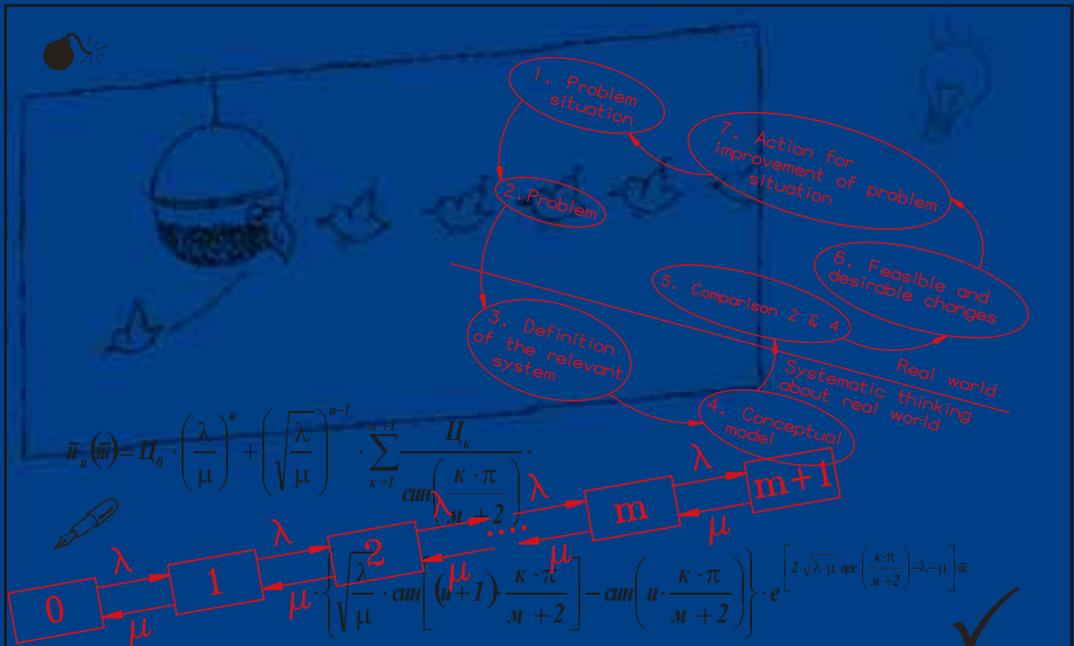


Uglješa Bugarić

Dušan Petrović

# MODELIRANJE SISTEMA OPSLUŽIVANJA



**UNIVERZITET U BEOGRADU – MAŠINSKI FAKULTET**

**Uglješa Bugarić**

**Dušan Petrović**

**MODELIRANJE SISTEMA  
OPSLUŽIVANJA**

**Beograd, 2011. godine**

Autori:  
Dr Uglješa Bugarić, vanredni profesor  
Dr Dušan Petrović, docent

## **MODELIRANJE SISTEMA OPSLUŽIVANJA**

### **I izdanje**

*Recenzenti:*  
Prof. dr Danijel Cvjetičanin  
Prof. dr Milomir Gašić

*Izdavač:*  
UNIVERZITET U BEOGRADU-  
MAŠINSKI FAKULTET  
11120 Beograd 35, Kraljice Marije 16,  
Telefon: 011 3370 350 i 3302 384  
Faks: 011 3370 364

*Za izdavača:*  
Dekan, prof. dr Milorad Milovančević

*Glavni i odgovorni urednik:*  
Prof. dr Aleksandar Obradović

Odobreno za štampanje odlukom Dekana Mašinskog fakulteta  
u Beogradu br.190/11 od 01.12. 2011. godine.

*Štampa:*  
**Planeta print**  
11000 Beograd, Ruzveltova 10, tel.: 011 3088 129

*Tiraž:* 300 primeraka

ISBN 978-86-7083-749-2

**Preštampavanje ili fotokopiranje nije dozvoljeno**

# PREDGOVOR

Knjiga „Modeliranje sistema opsluživanja“ je nastala kao odgovor autora na izraženu potrebu da se ova oblast približi studentima i projektantima sistema opsluživanja u industriji uopšte. Plod je višegodišnje projektantske prakse autora u oblasti kretanja materijala u industriji, fabrikama i skladišno-distributivnim sistemima.

Knjiga je prvenstveno namenjena, kao parcijalni udžbenik, studentima Mašinskog fakulteta u Beogradu iz predmeta: *Upravljanje sistemom održavanja, Industrijska logistika, Projektovanje logističko-distributivnih sistema i Operaciona istraživanja*, koje autori predaju na trećoj godini osnovnih akademskih studija kao i na prvoj i drugoj godini master akademskih studija usmerenja za Industrijsko inženjerstvo. Knjigu mogu koristiti i studenti doktorskih studija na iz predmeta *Modeliranje, optimizacija i prognoziranje u industrijskom inženjerstvu, Odabrana poglavlja logistike i Odabrana poglavlja iz operacionih istraživanja* kao osnovu za svoj dalji naučno-istraživački rad.

Posebna želja autora je da iskustva iz oblasti matematičkog modeliranja realizovanih u rešenjima u privredi pretoči u štivo koje projektanti mogu da koristite u svom svakodnevnom radu kako bi ga osavremenili i olakšali u cilju dobijanja boljih projektantskih rešenja.

Autori duguju posebnu zahvalnost recenzentima ove knjige, prof. dr Danijelu Cvjetičaninu i prof. dr Milomiru Gašiću, na korisnim sugestijama koje su uticale na poboljšanje kvaliteta ove knjige.

Autori pozivaju sve čitaoce ove knjige da, svojim sugestijama, primedbama i ukazivanjima na eventualne greške, pomognu u poboljšanju sledećeg izdanja.

Beograd, decembar 2011. godine

AUTORI



# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. RAZVOJ I PROJEKTOVANJE TEHNIČKIH SISTEMA .....	3
2.1. RAZVOJ NOVIH PROIZVODA I USLUGA .....	3
2.2. PROCES PROJEKTOVANJA - PROMENE U METODOLOGIJI.....	4
2.3. OBLASTI PROJEKTOVANJA - OBJEKTI, METODOLOGIJE I METODI .....	6
2.4. KRITERIJUMI EFEKTIVNOSTI I EFIKASNOSTI .....	7
2.5. POBOLJŠANJE METODOLOGIJA RAZVOJEM METODA I ALATA.....	8
3. SISTEM RAZVOJA I PROJEKTOVANJA .....	11
3.1. PROJEKTOVANJE SISTEMA - SISTEMSKO INŽENJERSTVO .....	11
3.2. SISTEMSKI PRILAZ .....	13
3.3. METODOLOGIJA SISTEMSKOG INŽENJERSTVA .....	15
3.4. METODOLOGIJA REŠAVANJA PROBLEMA REALNOG SVETA ZASNOVANA NA SISTEMSKOJ IDEJI.....	17
3.5. ODREĐIVANJE PERFORMANSI - RADNE SPOSOBNOSTI SISTEMA.....	19
4. SISTEMI OPSLUŽIVANJA.....	21
4.1. STRUKTURA MODELA TEORIJE REDOVA .....	22
4.1.1. Proces opsluživanja.....	22
4.1.2. Izvor (dolazni tok klijenata - jedinica).....	23
4.1.3. Red .....	24
4.1.4. Disciplina opsluživanja (disciplina u redu).....	24
4.1.5. Mehanizam opsluživanja.....	24
4.1.6. Elementarni sistem opsluživanja.....	25
4.2. TERMINOLOGIJA I OZNAČAVANJE .....	27
4.2.1. Relacije koje povezuju $N_{WS}$ , $N_W$ , $t_{WS}$ i $t_W$ .....	29
5. SLUČAJNI (STOHAISTIČKI) PROCESI .....	31
5.1. SLUČAJNI PROCES MARKOV-A.....	32
5.1.1. Nehomogeni slučajni proces Markov-a .....	35
5.1.2. Homogeni slučajni proces Markov-a .....	36

5.1.2.1. KARAKTERISTIKE HOMOGENOG SLUČAJNOG PROCESA MARKOV-A.....	37
6. SISTEMI OPSLUŽIVANJA SA GRUPNIM DOLASKOM I GRUPNIM OPSLUŽIVANJEM JEDINICA.....	45
6.1. JEDNOKANALNI SISTEM OPSLUŽIVANJA SA GRUPNIM DOLASKOM JEDINICA U SISTEM I OGRANIČENIM BROJEM MESTA U SISTEMU.....	45
6.1.1. Sistemi opsluživanja sa grupnim dolaskom jedinica u sistem – konstantna veličina grupe.....	53
6.2. SISTEMI SA GRUPNIM OPSLUŽIVANJEM JEDINICA.....	56
7. SLUČAJNI PROCES TIPA RAĐANJA I UMIRANJA.....	69
7.1. PROCES RAĐANJA.....	71
7.2. PROCES UMIRANJA.....	77
8. SISTEMI OPSLUŽIVANJA SA NEOGRANIČENIM IZVOROM JEDINICA.....	87
8.1. JEDNOKANALNI SISTEM OPSLUŽIVANJA SA OGRANIČENIM REDOM.....	87
8.1.1. Jednokanalni sistem opsluživanja bez reda.....	99
8.1.2. Jednokanalni sistema opsluživanja sa beskonačnim redom.....	103
8.2. VIŠEKANALNI SISTEM OPSLUŽIVANJA SA OGRANIČENIM REDOM.....	109
9. SISTEMI OPSLUŽIVANJA SA OGRANIČENIM IZVOROM JEDINICA.....	161
9.1. JEDNOKANALNI ZATVORENI SISTEM OPSLUŽIVANJA.....	162
9.2. VIŠEKANALNI ZATVORENI SISTEM OPSLUŽIVANJA.....	168
10. PRIMENA TEORIJE REDOVA.....	185
10.1. DONOŠENJE ODLUKA (ODLUČIVANJE).....	185
10.2. FORMULISANJE FUNKCIJE TROŠKOVA ČEKANJA.....	189
10.2.1. Forma $g(n)$ funkcije troškova čekanja.....	189
10.2.2. Forma $h(T_s)$ funkcije troškova čekanja.....	190
10.3. MODELI ZA ODLUČIVANJE (DONOŠENJE ODLUKA).....	192
10.3.1. Modeli za određivanje broja kanala za opsluživanje.....	192
10.3.2. Model za određivanje efikasnost i broja kanala za opsluživanje..	195
10.3.3. Model za određivanje broja modula (faza) opsluživanja.....	196

11. SIMULACIJA SISTEMA OPSLUŽIVANJA .....	229
11.1. O SIMULACIJI UOPŠTE .....	230
11.2. SUŠTINA SIMULACIJE .....	230
11.3. DISKRETNA ILI KONTINUALNA SIMULACIJA.....	232
11.3.1. Metoda fiksnog povećanja vremena.....	233
11.3.2. Metoda prelaska sa događaja na događaj.....	234
11.4. METOD MONTE KARLO – GENERISANJE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH.....	235
11.5. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA .....	236
11.5.1. Karakteristike slučajnih brojeva.....	237
11.5.2. Kongruentni metod za generisanje slučajnih brojeva .....	238
11.6. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PREMA ZADATOJ RASPODELI VEROVATNOĆA .....	241
11.6.1. Metod inverzne transformacije .....	241
11.6.2. Generisanje slučajnih brojeva po empirijskim raspedelama.....	242
11.6.2.1. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO EMPIRIJSKOJ DISKRETNOJ RASPODELI .....	242
11.6.2.2. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO EMPIRIJSKOJ KONTUNUALNOJ RASPODELI .....	243
11.6.3. Generisanje slučajnih brojeva po teorijskim kontinualnim raspedelama .....	245
11.6.3.1. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO RAVNOMERNOJ RASPODELI .....	245
11.6.3.2. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO EKSPONENCIJALNOJ RASPODELI .....	246
11.6.3.3. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO ERLANG-ovoj RASPODELI.....	247
11.6.3.4. GENERISANJE SLUČAJNIH BROJEVA PO NORMALNOJ RASPODELI.....	248
11.7. Pregled osnovnih simulacionih koraka .....	254
 12. PRIMENA SIMULACIJE U MODELIRANJU SISTEMA OPSLUŽIVANJA .....	 263
 ANNEX 1 – NEHOMOGENI SLUČAJNI PROCESI MARKOV-A .....	 309
 ANNEX 2 – HOMOGENI SLUČAJNI PROCESI MARKOV-A .....	 317
 ANNEX 3 – RADNI CUKLUSI SKLADIŠNIH UREĐAJA .....	 323
A3.1. DEFINICIJA RADNOG CIKLUSA.....	325

A3.2. RADNI CIKLUS VILJUŠKARA.....	326
A3.3. RADNI CIKLUSI VISOKO REGALNE DIZALICE.....	330
A3.3.1. Matematički model kretanja visoko regalne dizalice .....	330
A3.3.1. Jednostruki radni ciklus visoko regalne dizalice .....	332
A3.3.2. Složeni radni ciklus visoko regalne dizalice.....	337
A3.4. RADNI CIKLUSI SKLADIŠNIH UREĐAJA PRI KOMISIONIRANJU .....	341
A3.4.1. Komisioniranje.....	341
A3.4.2. Matematički model procesa komisioniranja .....	344
 ANNEX 4 – VERIFIKACIJA PRIPADNOSTI UZORKA TEORIJSKOJ RASPODELI VEROVATNOĆA .....	 353
A4.1. STATISTIČKA OBRADA REZULTATA EKSPERIMENTA – MERENJA .....	 353
A4.2. $\chi^2$ – TEST .....	353
 ANNEX 5 – OSNOVNI POJMOVI IZ VEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE .....	 377
A5.1. SLUČAJNI DOGAĐAJI .....	377
A5.1.1. Odnosi među slučajnim događajima.....	377
A5.2. VEROVATNOĆA DOGAĐAJA .....	380
A5.2.1. Verovatnoća zbira nesaglasnih i saglasnih događaja .....	381
A5.2.2. Verovatnoća proizvoda nezavisnih i saglasnih događaja .....	381
A5.2.3. Uslovna verovatnoća.....	382
A5.3. SLUČAJNE PROMENLJIVE .....	383
A5.3.1. Zakon raspodele verovatnoća i funkcija raspodele (kumulativni zakon) diskretne slučajne promenljive.....	 384
A5.3.1.1. NUMERIČKE KARAKTERISTIKE DISKRETNIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH.....	 385
A5.3.2. Gustina raspodele verovatnoća i funkcija raspodele kontinualne slučajne promenljive .....	 386
A5.3.2.1. NUMERIČKE KARAKTERISTIKE KONTINUALNIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH .....	 388
 LITERATURA .....	 389