

DRŽAVNI UNIVERZITET U NOVOM PAZARU
DEPARTMAN ZA MATEMATIČKE NAUKE

Diana Dolićanin Đekić
Emir Zogić
Enes Kačapor

Dženis Pučić
Edin Glogić
Lejlja Memić

Ćemal Dolićanin

Zbirka rešenih zadataka iz matematike za
pripremu prijemnog ispita na fakultetima
II

Geometrija
Analitička geometrija
Kombinatorika i teorija brojeva

Polinomi
Sistemi jednačina
Funkcije i nizovi



Novi Pazar
2019

Diana Dolićanin Đekić
Dženis Pučić
Emir Zogić
Edin Glogić
Enes Kačapor
Lejlja Memić
Ćemal Dolićanin

Zbirka rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima II

Recenzenti

dr Nenad Cakić, redovni profesor Državnog univerziteta u Novom Pazaru
Dragan Jovanović, profesor matematike u Gimnaziji iz Kraljeva
Hajro Zogić, profesor matematike u Gimnaziji iz Novog Pazara

Izdavači

Državni univerzitet u Novom Pazaru
Akademska misao, Beograd

Za izdavača

prof. dr Miladin Kostić, rektor

Štampa

Akademska misao, Beograd

Tiraž 200

ISBN 978-86-86893-90-1

ISBN 978-86-86893-91-8 *pł +

Sadržaj

Predgovor	1
1 Geometrija	3
1.1 Osnovni i izvedeni pojmovi geometrije	3
1.2 Odabrana tvrđenja u planimetriji	5
1.3 Ugao	5
1.4 Mnogougao	12
1.5 Trougao	14
1.6 Četvorougao	24
1.7 Krug	26
1.8 Pregled formula za računanje površina mnogouglova i formule za krug	29
1.9 Stereometrija	32
1.10 Ravni preseki prizme i piramide	34
1.11 Obrtna tela	35
1.12 Pregled formula za računanje površine i zapremine geo- metrijskih tela	37
1.13 Zadaci	38
2 Osnovni elementi vektorske algebre	105
2.1 Osnovni pojmovi. Slobodni vektori	105
2.2 Skalarni, vektorski i mešoviti proizvod vektora	110
2.2.1 Skalarni proizvod vektora	110

Sadržaj

2.2.2	Vektorski proizvod vektora	111
2.2.3	Mešoviti proizvod vektora	112
3	Analitička geometrija na ravni	115
3.1	Koordinate, pravouglo i polarne	115
3.2	Jednačine linije	119
3.3	Prava	121
3.4	Krive drugog reda	127
3.4.1	Kanonične jednačine	127
3.4.2	Primena translacije i rotacije Dekartovog pravou- glog koordinatnog sistema na pojednostavljiva- nje jednačina krivih drugog reda	137
3.5	Zadaci	146
4	Sistemi jednačina	163
4.1	Sistemi linearnih jednačina	163
4.2	Sistemi nelinearnih jednačina	169
4.3	Zadaci	172
5	Osnovni pojmovi: skup, relacija, funkcija	179
5.1	Skupovi	179
5.2	Relacije	181
5.3	Funkcije	182
5.4	Elementarne funkcije	184
5.5	Tablica izvoda	186
5.6	Zadaci	188
6	Polinomi	197
6.1	Zadaci	200
7	Nizovi	209
7.1	Zadaci	213

Sadržaj

8	Proporcije i procenti	237
8.1	Zadaci	238
9	Kombinatorika	243
9.1	Zadaci	247
10	Teorija brojeva	259
10.1	Deljivost u skupu celih brojeva	259
10.2	Funkcija ceo deo	262
10.3	Pojam verižnog razlomka	267
10.4	Zadaci	271
11	Razni zadaci	281
12	Test	287
	Literatura	289

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka namenjena je prvenstveno kandidatima koji se pripremaju za polaganje prijemnog ispita iz matematike radi upisa na fakultete, ali i učenicima srednjih škola i studentima, koji kao predmet imaju Elementarnu matematiku i inače, u cilju lakšeg savladavanja najznačajnijih oblasti srednjoškolske matematike. *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima, deo II* predstavlja celinu sa prvim delom istoimene zbirke, tj. sa *Zbirkom rešenih zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita na fakultetima, deo I*.

Zbirka je podeljena na 11 poglavlja. Svako poglavlje je podeljeno na kratke, po poglavljima, teorijske uvode i zadatke. U okviru teorijskog uvoda u svakom poglavlju date su osnovne teorijske činjenice koje su ilustrovane primerima, a u cilju boljeg razumevanja. Zadaci u zbirci su dati u formatu zadataka koji se postavljaju na prijemnim ispitima sa ponuđenim odgovorima. Karakteristika ove zbirke je u tome što je svaki zadatak detaljno rešen.

Ovom prilikom zahvaljujemo se svima koji su doprineli kvalitetu zbirke, a posebno se zahvaljujemo recenzentima dr Nenadu Cakiću, redovnom profesoru Državnog univerziteta u Novom Pazaru,

Draganu Jovanoviću, profesoru matematike Gimnazije u Kraljevu, i Hajru Zogiću, profesoru matematike Gimnazije u Novom Pazaru, koji su dali niz značajnih primedbi i time veoma unapredili kvalitet ove zbirke.

Posebno se zahvaljujemo rektoru Državnog univerziteta u Novom Pazaru, prof. dr Miladinu Kostiću, što je prihvatio inicijativu za pripremu i izdavanje ove zbirke.

U Novom Pazaru, 15.03.2019.

Autori

Glava 1

Geometrija

1.1 Osnovni i izvedeni pojmovi geometrije

U geometriji polazimo od osnovnih objekata i osnovnih relacija.

1. Osnovni objekti su: tačka, prava i ravan.
2. Osnovne relacije su: biti između i biti podudaran.

Ove pojmove ne definišemo i o njima imamo uobičajenu intuitivnu predstavu. Tačku posmatramo kao element realnog trodimenzionalnog prostora.

Definicija 1.1.1. *Skup svih tačaka je trodimenzionalni prostor, koji označavamo sa E_3 .*

Tačke su elementi trodimenzionalnog prostora i označavaćemo ih velikim slovima latinice: $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$.

Prave su podskupovi prostora, koje ćemo označavati malim slovima latinice: $a, b, c, \dots, p, q, \dots$, a u određenim slučajevima koristićemo i druge oznake za prave što se posebno naglašava.

Ravni su takođe podskupovi prostora. Njih ćemo označavati grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \dots$, a u nekim slučajevima, po dogovoru, koristićemo i neke druge oznake.

Duž je deo prave između dve tačke koje nazivamo njenim krajevima.

Krak je deo prave ograničen tačkom u jednom smeru i beskonačno produžen u drugom smeru.

Definicija 1.1.2. *Neprazan skup tačaka nazivamo geometrijskom figurom ili prosto figurom.*

Relacija *između* je relacija među tačkama i dužine je 3. Za tačke A, B, C , ako je tačka B između A i C , to označavamo sa $A - B - C$ što takođe podrazumeva da su to tri uzastopne tačke jedne prave.

Relacija *podudarno* je takođe relacija među tačkama i dužine je 4. Ovom relacijom se upoređuju parovi tačaka. Tako za tačke A, B, C, D , ako su parovi $\{A, B\}$ i $\{C, D\}$ u toj relaciji, tada pišemo $\{A, B\} \cong \{C, D\}$. Relaciji podudarnosti najbliži je pojam jednakih rastojanja. Za dve prave a i b kažemo da su paralelne ako je $a = b$ ili ako obe pripadaju jednoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka.

1.2 Odabrana tvrđenja u planimetriji

Sledeća tvrđenja se često koriste u planimetriji:

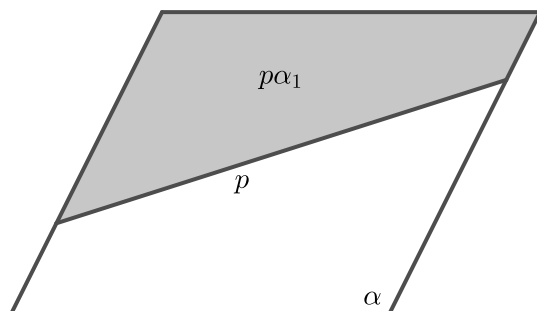
1. Najkraće rastojanje između dve tačke je dužina duži koja ih spaja.
2. Samo jedna prava se može povući kroz dve različite tačke.
3. Duž se može beskonačno produžiti na oba svoja kraja.
4. Prilikom pomeranja geometrijske figure u ravni ne menja se njen oblik niti dimenzije.
5. Dve prave koje leže u istoj ravni mogu se seći u najviše jednoj tački.
6. Dve prave koje leže u istoj ravni su paralelne ili se seku.
7. Neka je data prava p i tačka A van prave p . Tada se tačno jedna prava može povući kroz tačku A koja je paralelna pravoj p .
8. Dve prave paralelne trećoj pravoj, paralelne su međusobno.

1.3 Ugao

Definišimo najpre pojam poluprave i poluravni.

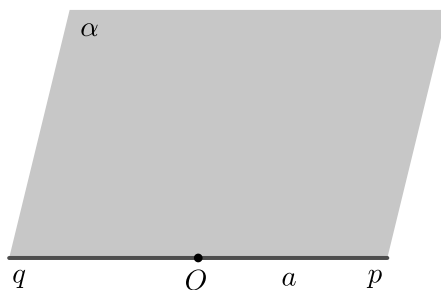
Definicija 1.3.1. *Skup koji se sastoji od tačke O prave p i skupa p_1 tačaka prave p sa jedne strane tačke O naziva se polupravom koju označavamo sa Op_1 . Tačka O je početna tačka te poluprave.*

Definicija 1.3.2. Prava p ravni α i skup α_1 svih tačaka te ravni sa iste strane prave p čine poluravan ravni α sa ivicom p , koju označavamo sa $p\alpha_1$ (slika 1).



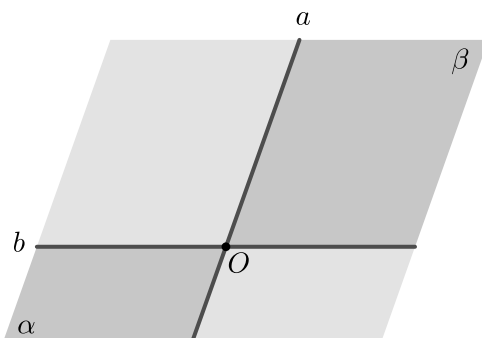
Slika 1

Definicija 1.3.3. Unija otvorene poluravni α i polupravih Op i Oq ivice a poluravni α naziva se opruženim uglom. Poluprave Op i Oq su kraci, tačka O teme, a otvorena poluravan oblast (unutrašnja oblast) opruženog ugla Opq (slika 2).



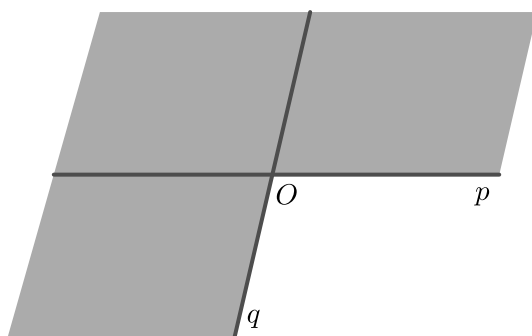
Slika 2

Definicija 1.3.4. Neka su $a\alpha$ i $b\beta$ poluravni jedne ravni sa ivicama a i b koje se seku u tački O . Presek ovih poluravni naziva se konveksnim (ispupčenim) uglom sa temenom O (slika 3).



Slika 3

Definicija 1.3.5. Unija dve poluravni jedne ravni, sa neparalelnim ivicama, naziva se nekonveksnim (konkavnim) uglom (slika 4).

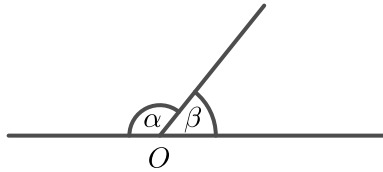


Slika 4

U narednom izlaganju predstaviceemo definicije susednih, naporednih i unakrsnih uglova.

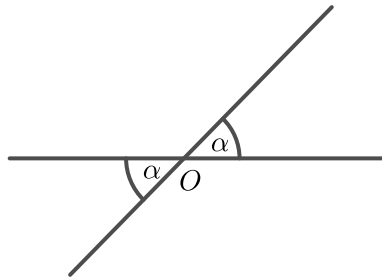
Definicija 1.3.6. *Dva ugla Opq i Oqr , koji pripadaju istoj ravni i kojima je presek krak Oq , nazivaju se susednim uglovima.*

Definicija 1.3.7. *Susedni uglovi ciji je zbir opruzen ugao nazivaju se naporednim (ili uporednim) uglovima (slika 5).*



Slika 5

Definicija 1.3.8. *Par nesusednih konveksnih uglova, određenih dvema pravama koje se seku, nazivamo unakrsnim uglovima (slika 6).*



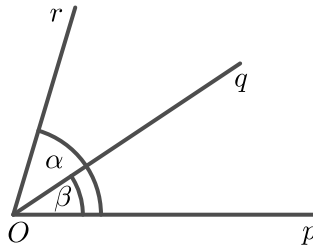
Slika 6

Pređimo sada na pojam mere ugla. Na početku definišimo relaciju jednakih uglova kao i relaciju *manje* odnosno *veće* među uglovima.

Definicija 1.3.9. Dva ugla Opq i $O_1p_1q_1$ jednaki su ako i samo ako na kracima Op, Oq, O_1p_1, O_1q_1 postoje redom tačke P, Q, P_1, Q_1 , takve da je $OP = O_1P_1, OQ = O_1Q_1$ i $PQ = P_1Q_1$.

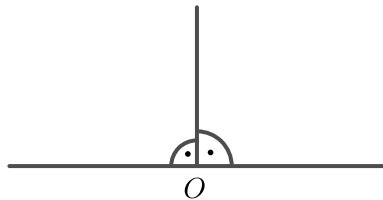
Definicija 1.3.10. Ako su α i β dva ugla, Opq i Oqr dva susedna ugla, tako da je $\alpha = Opq$ i $\beta = Oqr$, tada kažemo da je ugao Opr zbir uglova α i β i pišemo $Opr = \alpha + \beta$. Za ugao γ , jednak uglu Opr , takođe važi $\gamma = \alpha + \beta$.

Definicija 1.3.11. Ako su Opq i Oqr susedni uglovi, a α i β takvi uglovi da je $\alpha = Opr$ i $\beta = Opq$, tada kažemo da je ugao α veći od ugla β , odnosno da je ugao β manji od ugla α i pišemo $\alpha > \beta$ ili $\beta < \alpha$ (slika 7).



Slika 7

Definicija 1.3.12. Ugao koji je jednak svom naporednom uglu je prav ugao (slika 8).



Slika 8